# Corrigé du partiel du 23 février 2026

Durée 2h

*La qualité de la rédaction interviendra dans l'appréciation de la copie.* ***Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.***

**Exercice 1 -** Échelonner et résoudre les systèmes suivants (en donner toutes les solutions s'il y en a) :

$$(S_1)\begin{cases} x+y-2z=0 \\ -x+y+z=1 \\ 3x+y-3z=1 \end{cases}, \quad (S_2)\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+3y+4z=2 \\ 3x+4y+5z=4 \end{cases}$$

**Réponses. [2+2 pts]**

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x}+y-2z=0 \\ 2y-z=1 \\ -2y+3z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x}+y-2z=0 \\ \boxed{2y}-z=1 \\ 2z=2 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y,z)=(1,1,1).$$

$$(S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x}+2y+3z=0 \\ -y-2z=2 \\ -2y-4z=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x}+2y+3z=0 \\ \boxed{-y}-2z=2 \\ 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y-3z=4+z \\ y=-2-2z \\ z \text{ réel quelconque.} \end{cases}$$

**Exercice 2 -** Montrer que l'ensemble

$$D=\{v=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x-2y+z=0=x-y-z\}$$

est une droite vectorielle et en donner un vecteur directeur $u$.

**Réponse. [2 pt]**

On résout le système de $D$. On a $v=(x,y,z)\in D \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \boxed{x}-2y+z=0 \\ y-2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-z=3z \\ y=2z \\ z \text{ quelconque.} \end{cases} \Leftrightarrow v=z(3,2,1).$$

$D$ est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u=(3,2,1)$.

**Exercice 3 -** Soit $A=\begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $f : X \mapsto AX$ l'application linéaire $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ associée.

**1.** Calculer $f(X)$ pour $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

**2.** Montrer que pour tout $X\in\mathbb{R}^2$, $f(X)$ appartient à la droite vectorielle $D$ engendrée par $u=(-2,1)$. L'application $f$ est-elle surjective ?

**3.** Pour $m$ réel donné, déterminer l'image par $f$ de la droite affine $\Delta_m$ passant par $(m,0)$ et de direction $v=(3,-1)$. L'application $f$ est-elle injective ?

**4.** Calculer $A^2$. Que peut-on en déduire sur $f \circ f$ ?

**Réponses. 1. [1 pt]** On calcule $f(X) = AX = \begin{pmatrix} -2x-6y \\ x+3y \end{pmatrix}$.

**2. [1 pt]** D'après la question précédente, $f(X) = (x+3y)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = (x+3y)u \in D = \mathrm{Vect}(u)$.

**[1 pt]** L'application $f$ n'est pas surjective puisque par exemple $e_1 = (1,0) \notin D$ n'a pas d'antécédent.

**3. [1 pt]** Pour $w = (m,0) + tv \in \Delta_m$, on a $f(w) = A\begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} + tA\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2m \\ m \end{pmatrix}$. L'image de $\Delta_m$ par $f$ est donc l'unique vecteur $(-2m, m)$.

**[1 pt]** Comme $(-2m, m)$ a une infinité d'antécédents par $f$ (tout $\Delta_m$), l'application $f$ n'est pas injective.

**4. [0,5 pt]** On trouve que $A^2 = A$.

**[0,5 pt]** On en déduit que $f \circ f = f$ puisque ces applications linéaires ont même matrice.

**Exercice 4 -** On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \ , \ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Quels sont les produits de deux matrices parmi $A$, $B$, $C$ qu'il est possible de faire ? Calculer tous ces produits.

**Réponse. [3x1 pts]** On trouve $AB = (8)$, $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ et $CB = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

**Exercice 5 -** Pour $a$ paramètre réel, on pose $M_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

Pour quels nombres $a$ la matrice $M_a$ est-elle inversible ? Calculer son inverse dans ce cas.

**Réponse. [1 pt]** La matrice $M_a$ est échelonnée et de rang 3 pour $a \neq 0$. Elle est inversible dans ce cas. Pour $a = 0$, $M_0 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 2 et n'est donc pas inversible.

**[1 pt]** Pour $a \neq 0$, on résout $M_a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \iff$

$$\begin{cases} x+y+z = x' \\ \quad\ \ y+z = y' \\ \qquad\ az = z' \end{cases} \iff \begin{cases} x = x' - y - z = x' - y' \\ y = y' - z = y' - z'/a \\ z = z'/a \end{cases}$$

d'où l'on tire $M_a^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/a \\ 0 & 0 & 1/a \end{pmatrix}$.

**Exercice 6 -** On note $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**1.** Donner une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_2$.

**2.** Donner une matrice $B \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = I_2$ avec $B \neq I_2$ et $B \neq -I_2$.

**3.** Donner une matrice $C \in M_2(R)$ telle que $C^3 = I_2$ avec $C \neq I_2$.

**Réponses. 1. [1 pt]** On peut prendre $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, matrice de la rotation d'angle $\pi/2$.

**2. [1 pt]** On peut prendre par exemple $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, matrice de la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses (ou toute autre symétrie par rapport à une droite).

**3. [1 pt]** On peut prendre la matrice de la rotation d'angle $2\pi/3$ : $C = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.