S2 PCST — Orsay 2024-2025

Algèbre linéaire renforcée

Corrigé du partiel du 3 mars 2025

Durée 2h

Exercice 1 - Pour m paramètre réel donné, on considère le système

$$(S_m)\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+3y+4z=2 \\ 3x+4y+5z=m \end{cases}$$

1. Calculer le rang de (S_m). Discuter suivant la valeur de m l'existence ou non de solution de (S_m).

2. Déterminer suivant la valeur de m toutes les solutions de (S_m), lorsqu'elles existent.

Réponses. 1. On échelonne $(S_m) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \boxed{x}+y+z=1 \\ \quad y+2z=0 \\ \quad y+2z=m-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x}+y+z=1 \\ \quad \boxed{y}+2z=0 \\ \quad 0=m-3 \end{cases}$$

[1 pt] Le rang de (S_m) est 2.

[1 pt] Pour $m \neq 3$, le système est incompatible et ne possède pas de solution. Pour $m=3$, il possède une infinité de solutions.

2. [1 pt] Si $m=3$, le système (S_3) a une infinité de solutions paramétrées par l'inconnue non principale z. On a z quelconque, $y=-2z$ et $x=1+z$.

Exercice 2 - On considère le plan P de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs

$$v_1=(1,1,1,1) \quad \text{et} \quad v_2=(1,2,3,4).$$

Existe-t-il un réel t tel que le vecteur $v=(2,0,-2,t)$ appartienne à P ? (Justifier.)

Réponse. [2 pts] On a $v\in P$ ssi il existe λ_1 et λ_2 tels que $\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2=v$, c'est-à-dire ssi

$$(S)\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2=2 \\ \lambda_1+2\lambda_2=0 \\ \lambda_1+3\lambda_2=-2 \\ \lambda_1+4\lambda_2=t \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \boxed{\lambda_1}+\lambda_2=2 \\ \quad \lambda_2=-2 \\ \quad 2\lambda_2=-4 \\ \quad 3\lambda_2=t-2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \boxed{\lambda_1}+\lambda_2=2 \\ \quad \boxed{\lambda_2}=-2 \\ \quad 0=0 \\ \quad 0=t+4 \end{cases}$$

On a donc $v\in P$ ssi $t=-4$ (et on a alors $v=4v_1-2v_2$).

Exercice 3 - On note $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$ et on considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(e_1)=e_1-e_2\ , \quad f(e_2)=e_2-e_3 \quad \text{et} \quad f(e_3)=e_3-e_1\,.$$

1. Donner la matrice A de f et calculer l'image $f(u)$ d'un vecteur $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ quelconque.

2. Calculer le rang de A. L'application f est-elle un isomorphisme ?

3. Résoudre l'équation $f(u) = 0$. L'application f est-elle injective ? (Justifier.)

4. À quelle condition portant sur $v = (x', y', z')$ l'équation $f(u) = v$ possède-t-elle au moins une solution $u = (x, y, z)$? L'application f est-elle surjective ? (Justifier.)

Réponses. 1. [1+1 pts] On a $A = \mathrm{Mat} f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. On peut calculer $f(u)$ en colonne à l'aide de A. On a $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - z \\ -x + y \\ -y + z \end{pmatrix}$.

2. [1 pt] On a en échelonnant $\mathrm{rang} A = \mathrm{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$

[0,5 pt] Comme $\mathrm{rang} A < 3$, A n'est pas inversible et l'application linéaire associée f n'est pas un isomorphisme.

3. [0,5+1 pt] D'après la question 1, $u = (x, y, z)$ satisfait $f(u) = 0$ ssi $x = y = z$ c'est-à-dire ssi $u = (x, x, x)$ avec x quelconque. Le vecteur $\overrightarrow{0}$ a donc une infinité d'antécédents et f n'est pas injective.

4. [1 pt] On a $f(u) = v$ ssi

$$\begin{cases} x - z = x' \\ -x + y = y' \\ -y + z = z' \end{cases} \iff \begin{cases} \boxed{x} - z = x' \\ y - z = y' + x' \\ -y + z = z' \end{cases} \iff \begin{cases} \boxed{x} - z = x' \\ \boxed{y} - z = y' + x' \\ 0 = x' + y' + z' \end{cases}$$

L'équation possède donc au moins une solution ssi $x' + y' + z' = 0$ (équation d'un plan P de $\mathbb{R}^3$).

[1 pt] En particulier, cette équation n'a pas de solution pour $v = e_1 = (1, 0, 0)$ par exemple, ni pour aucun vecteur qui n'est pas dans le plan P. Le vecteur e_1 n'a donc pas d'antécédent et f n'est pas surjective.

Exercice 4 - On considère les deux matrices $L = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{1,2}(\mathbb{R})$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{R})$.

1. Calculer LV, $N = VL$ et N^2.

On note désormais $M = I_2 + N$ avec $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Exprimer M^2 puis M^3 comme des combinaisons linéaires de I_2 et N.

3. Montrer plus généralement que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice M^n s'écrit $M^n = a_n I_2 + b_n N$ avec des nombres a_n et b_n à déterminer. *Indication.* Après avoir deviné la formule générale à l'aide de la question 2, on pourra la démontrer par récurrence sur n.

Réponses. 1. [3x0,5 pt] On a $LV = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$, $N = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, et $N^2 = VLVL = V0L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. [0,75 pt] On a $M^2 = (I_2 + N)(I_2 + N) = I_2 + 2N + N^2 = I_2 + 2N$ puisque $N^2 = 0$.

[0,75 pt] D'où $M^3 = MM^2 = (I_2 + N)(I_2 + 2N) = I_2 + 3N + 2N^2 = I_2 + 3N$.

3. [1,5 pts] D'après la question précédente, on va montrer par récurrence que

$$M^n = I_2 + nN\,.$$

On a vu que cette formule est vraie pour $n = 1$, 2 et 3. On la suppose vraie au rang n et on calcule

$$M^{n+1} = (I_2 + N)(I_2 + nN) = I_2 + (n+1)N + nN^2 = I_2 + (n+1)N,$$

puisque $N^2 = 0$.

Exercice 5 - Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

2. Trouver des matrices B_1 et B_2 telles que

$$AB_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_2 A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Réponses. 1. [0,5+1 pts] On a $\det A = 1 \neq 0$ donc A est inversible et de plus $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$.

2. [1+1 pts] On a par calcul matriciel $B_1 = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} 11 & 3 \end{pmatrix}$.