

Corrigé du partiel du 4 mars 2024

Exercice 1 - Échelonner et résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1) \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -x + y + z = 1 \\ 3x - 3y + z = 1 \end{cases}, \quad (S_2) \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ 2x + y + 2z = 1 \\ 3x + y + z = 2 \end{cases}$$

Réponses. 2×[2 pts]

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} - 2y + z = 0 \\ -y + 2z = 1 \\ 3y - 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} - 2y + z = 0 \\ \boxed{-y} + 2z = 1 \\ \boxed{4z} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

$$(S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} + y + 3z = 0 \\ -y - 4z = 1 \\ -2y - 8z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} + y + 3z = 0 \\ \boxed{-y} - 4z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - 3z = 1 + z \\ y = -1 - 4z \\ z \text{ quelconque.} \end{cases}$$

Exercice 2 - Montrer que

$$D = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 = x + 2y + 3z + 4t = x + 3y + 4z + 5t\}$$

est une droite vectorielle et en donner un vecteur directeur u .

Réponses. [2 pts] On a $v = (x, y, z, t) \in D \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \boxed{x} + y + z + t = 0 \\ y + 2z + 3t = 0 \\ 2y + 3z + 4t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} + y + z + t = 0 \\ \boxed{y} + 2z + 3t = 0 \\ \boxed{-z} - 2t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} = -y - z - t = 0 \\ \boxed{y} = -2z - 3t = t \\ \boxed{z} = -2t, t \text{ quelconque} \end{cases} \Leftrightarrow v = t(0, 1, -2, 1),$$

c'est-à-dire que v appartient à la droite engendrée par $u = (0, 1, -2, 1)$.

Exercice 3 - On s'intéresse au problème suivant : étant donnés 5 nombres réels L_1, L_2, C_1, C_2, C_3 , trouver une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ dont les sommes de chaque ligne et colonne soient ces nombres $L_1 = a + b + c$, $L_2 = d + e + f$, $C_1 = a + d$, $C_2 = b + e$, $C_3 = c + f$.

1. Ce problème peut-il avoir, pour certaines valeurs de L_1, L_2, C_1, C_2, C_3 , une unique solution? (Justifier.)
2. Ce problème a-t-il toujours au moins une solution? *Indication.* Considérer $L_1 + L_2$ et $C_1 + C_2 + C_3$.

Réponses.

1. **[1,5 pt]** Le système linéaire à résoudre a 6 inconnues (les coefficients de A) et 5 équations (les valeurs des sommes). Il possède donc au moins une inconnue non principale.

Il ne peut donc jamais avoir une solution unique (il peut en avoir aucune ou une infinité suivant qu'il soit compatible ou non).

2. [1,5 pt] Si A est solution alors nécessairement

$$L_1 + L_2 = a + b + c + d + e + f = C_1 + C_2 + C_3.$$

Le problème n'a donc pas de solution si $L_1 + L_2 \neq C_1 + C_2 + C_3$.

Remarque. Lorsque la condition $L_1 + L_2 = C_1 + C_2 + C_3$ est satisfaite, il y a bien des solutions, par exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & L_1 \\ C_1 & C_2 & f \end{pmatrix}$ avec $f = L_2 - C_1 - C_2 = C_3 - L_1$.

Exercice 4 - Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $f : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 associé.

1. Calculer $f(X)$ pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

2. Calculer A^2 . Que vaut $(f \circ f)(X)$?

3. Déterminer l'image par f de la droite vectorielle D engendrée par $u = (1, 2)$.

4. Déterminer l'image par f de la droite affine Δ passant par $e_1 = (1, 0)$ et de direction $v = (1, 1)$.

Réponses. 1. [1 pt] On trouve $f(X) = AX = \begin{pmatrix} -x + y \\ -2x + 2y \end{pmatrix}$.

2. [1 pt] On obtient $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = A$, d'où $(f \circ f)(X) = A^2X = AX = \begin{pmatrix} -x + y \\ -2x + 2y \end{pmatrix}$.

3. [1 pt] On a $f(u) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = u$. L'image de D par f est engendrée par $f(u) = u$. C'est donc D elle-même.

4. [1 pt] Les vecteur w de Δ sont de la forme $e_1 + tv$, et donc $f(w) = f(e_1) + tf(v)$ avec $f(v) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a donc $f(w) = f(e_1) = (-1, -2)$ et l'image par f de Δ est réduite au vecteur $(-1, -2)$.

Exercice 5 - Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer, lorsque c'est possible, les produits A^2 , B^2 , AB et BA .

2. Que vaut $BABA$?

Réponses.

1. [1 pt] Les matrices A et B ne sont pas carrées, et donc A^2 et B^2 n'existent pas.

On trouve $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ [1 pt] et $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ [1 pt].

2. [1 pt] On a alors $BABA = B(AB)A = B0A = 0$ (matrice nulle 3×3).

Exercice 6 - Pour t paramètre réel, on considère la matrice

$$M_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Pour quels t la matrice M_t est-elle inversible ? Calculer son inverse $(M_t)^{-1}$ dans ce cas.
2. Calculer le produit $M_t \cdot M_{t'}$.
3. En déduire un calcul de $(M_1)^{2024}$. (Justifier.)

Réponses.

1. **[0,5+1 pt]** La matrice 3×3 M_t est inversible quel que soit t car (déjà échelonnée) de rang 3. On a

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -t \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

d'où $(M_t)^{-1} = M_{-t}$.

2. **[1 pt]** On trouve $M_t \cdot M_{t'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t+t' \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{t+t'}$.

3. **[1 pt]** D'après la question précédente, on a $M_n M_1 = M_{n+1}$ pour tout entier n . On a donc $(M_1)^2 = M_2$, d'où $(M_1)^3 = (M_1)^2 M_1 = M_2 M_1 = M_3$.

Ceci nous amène à montrer par récurrence sur n que $(M_1)^n = M_n$. En effet, cela est vrai pour $n = 1$, et si $(M_1)^n = M_n$ alors $(M_1)^{n+1} = (M_1)^n M_1 = M_n M_1 = M_{n+1}$.

On a donc $(M_1)^{2024} = M_{2024}$ finalement.