

Corrigé de l'examen du 5 mai 2025

Exercice 1 - Dans \mathbb{R}^3 , on considère les vecteurs

$$v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 2, 3), v_3 = (-1, 1, 3), v_4 = (0, 1, 2).$$

La famille $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est-elle libre? Quel est son rang? Est-elle génératrice de \mathbb{R}^3 ? Donner une base de $\text{Vect}(\mathcal{F})$. (Justifier les réponses.)

Réponses.

[0,5 pt] Une famille de 4 vecteurs de \mathbb{R}^3 est toujours liée puisque $4 > \dim \mathbb{R}^3 = 3$.

[1 pt] On a $\text{rang}(\mathcal{F}) =$

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

[0,5 pt] La dimension de l'espace engendré par \mathcal{F} est le rang de $\mathcal{F} = 2$. La famille \mathcal{F} engendre donc un plan de \mathbb{R}^3 et n'est pas génératrice de \mathbb{R}^3 .

[0,5 pt] Une base de $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est donnée par les vecteurs de \mathcal{F} correspondant aux indices des pivots, c'est-à-dire $B_{\mathcal{F}} = (v_1, v_2)$.

Exercice 2 - Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire associée à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -6 & 4 \\ 3 & -9 & 6 \end{pmatrix}$ dans

la base canonique de \mathbb{R}^3 .

- Déterminer le rang de f et donner une base de l'image de f . L'application f est-elle surjective?
- Que vaut $\dim \ker f$? L'application f est-elle injective? Déterminer une base du noyau de f si cet espace n'est pas nul.
- Les espaces $\ker f$ et $\text{Im } f$ sont-ils supplémentaires? (Justifier.)
- Déduire de ce qui précède qu'il existe une base $B' = (u_1, u_2, u_3)$ de \mathbb{R}^3 dans laquelle on a $\text{Mat}_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Quelle est la signification géométrique précise de f ?
- On note I_3 la matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$. Que valent A^{2025} et $(I_3 - A)^{2025}$? (Justifier.)

Réponses.

1. **[0,5 pt]** On a en échelonnant,

$$\text{rang } f = \text{rang} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -3 & 2 \\ 2 & -6 & 4 \\ 3 & -9 & 6 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

[0,5 pt] L'image de f est donc la droite engendrée par $u = (1, 2, 3) = f(e_1)$.

[0,5 pt] Comme $\text{Im } f \neq \mathbb{R}^3$, l'application f n'est pas surjective.

2. [0,5 pt] En utilisant le théorème du rang, on a

$$\dim \ker f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Im} f = 3 - \operatorname{rang} f = 3 - 1 = 2.$$

[0,5 pt] Comme $\ker f \neq \{\vec{0}\}$, l'application f n'est pas injective.

[0,5 pt] On a $v = (x, y, z) \in \ker f \Leftrightarrow$

$$f(v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + 2z = 0 \\ 2x - 6y + 4z = 0 \Leftrightarrow x - 3y + 2z = 0. \\ 3x - 9y + 6z = 0 \end{cases}$$

Finalement $\ker f$ est le plan d'équation $x - 3y + 2z = 0$. Une base en est par exemple $B = (u_1 = (3, 1, 0), u_2 = (-2, 0, 1))$.

3. [1 pt] On a $\mathbb{R}^3 = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$ ssi $\dim \ker + \dim \operatorname{Im} f = 3$, ce qui est vrai, et $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{\vec{0}\}$.

Comme $\operatorname{Im} f$ est la droite engendrée par $u = (1, 2, 3)$, et que u ne satisfait pas l'équation $x - 3y + 2z = 0$ de $\ker f$, on a bien $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{\vec{0}\}$. Les deux espaces $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont bien supplémentaires.

4. [1,5 pts]

Analyse. S'il existe une base $B' = (u_1, u_2, u_3)$ telle que

$$\operatorname{Mat}_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

alors nécessairement :

$$f(u_1) = (0, 0, 0)_{B'} = \vec{0}, \quad f(u_2) = (0, 0, 0)_{B'} = \vec{0} \quad \text{et} \quad f(u_3) = (0, 0, 1)_{B'} = u_3,$$

c'est-à-dire qu'il faut que u_1 et $u_2 \in \ker f$ et $u_3 \in \operatorname{Im} f$ avec $f(u_3) = u_3$.

Synthèse. D'après la question 1, les vecteurs $u_1 = (3, 1, 0)$, $u_2 = (-2, 0, 1)$ forment une base de $\ker f$ et on a $u_3 = (1, 2, 3)$ base de $\operatorname{Im} f$. On vérifie de plus que l'on a $f(u_3) = u_3$. Comme $\ker f \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$, on conclut que $B' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 qui convient.

[0,5 pt] D'après sa matrice dans la base B' , f est la projection sur la droite $D = \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(u_3)$ le long du plan $P = \ker f = \operatorname{Vect}(u_1, u_2)$.

5. [1 pt] Comme A est la matrice d'une projection on a $A^2 = A$, d'où $A^{2025} = A$ par une récurrence immédiate.

$I_3 - A$ est aussi la matrice de la projection $\operatorname{Id} - f$ sur P le long de D . On a donc de même $(I_3 - A)^{2025} = I_3 - A$.

Exercice 3 - On considère dans \mathbb{R}^2 les vecteurs $v_1 = (2, -1)$ et $v_2 = (-1, 1)$.

1. Vérifier que $B' = (v_1, v_2)$ est une base de \mathbb{R}^2 . Calculer les coordonnées de $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ dans cette base.

Soit f l'unique application linéaire de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f(v_1) = v_1$ et $f(v_2) = -v_2$.

2. Donner la matrice A' de f dans la base B' . Que représente géométriquement f ?

3. Calculer à l'aide de 1, et de la définition de f , les vecteurs $f(e_1)$ et $f(e_2)$. Exprimer d'abord les résultats en fonction de v_1 et v_2 , puis à l'aide de e_1 et e_2 .

4. En déduire la matrice A de f dans la base canonique $B_{can} = (e_1, e_2)$ de \mathbb{R}^2 . Que vaut A^2 ?

Réponses.

1. [0,5 pt] $B' = (v_1, v_2)$ est une base de \mathbb{R}^2 car v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires.

[1 pt] On trouve que $e_1 = v_1 + v_2 = (1, 1)_{B'}$ et $e_2 = v_1 + 2v_2 = (1, 2)_{B'}$.

2. [1 pt] Par définition de f , on a $A' = \text{Mat}_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

[0,5 pt] Par définition, f est la symétrie par rapport à la droite engendrée par v_1 suivant la droite engendrée par v_2 .

3. [1,5 pts] D'après 1, on a par linéarité de f

$$f(e_1) = f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = v_1 - v_2 = (3, -2)$$

et

$$f(e_2) = f(v_1 + 2v_2) = f(v_1) + 2f(v_2) = v_1 - 2v_2 = (4, -3).$$

4. [0,5 pt] D'où, $A = \text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

[0,5 pt] On a (dans toute base pour une symétrie) $A^2 = \text{Mat}_B(f^2) = \text{Mat}_B(\text{Id}) = I_2$.

Exercice 4 - On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de A .

2. Montrer que A est diagonalisable et trouver une base $B = (u_1, u_2)$ de diagonalisation.

3. On considère la suite de vecteurs définie par $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X(n+1) = AX(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Calculer $X(n)$.

Réponses.

1. [0,5 pt] On a $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - \lambda - 2$.

[1 pt] Le discriminant est $\Delta = 9$, les valeurs propres sont réelles et valent $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 2$.

2. [0,5 pt] A est diagonalisable car elle possède 2 valeurs propres réelles distinctes (cas $\Delta > 0$).

[1 pt] On trouve que $u_1 = (1, -1)$ est une solution non nulle de $Au_1 = -u_1$, et $u_2 = (1, 2)$ est une solution non nulle de $Au_2 = 2u_2$. Cela donne une base de diagonalisation de A .

3. [2 pt] En écrivant $X(0) = C_1u_1 + C_2u_2$, on obtient que

$$X(n) = A^n X(0) = C_1(-1)^n u_1 + C_2 2^n u_2.$$

On trouve que $C_1 = 2/3$ et $C_2 = 1/3$, d'où

$$X(n) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2(-1)^n + 2^n \\ 2(-1)^{n+1} + 2^{n+1} \end{pmatrix}.$$