Corrigé de l'examen du 14 mai 2024

Exercice 1 - Déterminer la dimension et une base du sev E de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$E = \{v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x - 2y + 3z - 4t = 0\}.$$

Réponse.

[1 pt] E est donné par une équation avec 3 inconnues secondaires. On a donc $\dim E = 3$.

[1 pt] On a

$$v \in E \Leftrightarrow x = 2y - 3z + 4t \Leftrightarrow v = y(2, 1, 0, 0) + z(-3, 0, 1, 0) + t(4, 0, 0, 1)$$

avec y, z et t quelconques.

Les 3 vecteurs $v_1 = (2, 1, 0, 0)$, $v_2 = (-3, 0, 1, 0)$ et $v_3 = (4, 0, 0, 1)$ forment une base de E car c'est une famille génératrice de E qui est de dimension 3.

Exercice 2 - On considère les deux vecteurs $v_1 = (1, 2)$ et $v_2 = (1, 3)$ de $\mathbb{R}^2$. On note $B_{can} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Vérifier que $B = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Donner la matrice de passage P de B_{can} à B. Calculer P^{-1}. Quelles sont les coordonnées de $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ dans B ?

Soit p la projection sur la droite D_1 engendrée par v_1 le long de D_2 engendrée par v_2.

2. Que valent $p(v_1)$ et $p(v_2)$? Quelle est la matrice M de p dans la base $B = (v_1, v_2)$?

3. Soit N la matrice de p dans la base canonique. Quelle est la relation entre M, N, P et P^{-1} ?

4. En déduire un calcul de N. Que vaut N^2 ?

Réponses.

1. [0,5 pt] Les vecteurs v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires et forment donc une base de $\mathbb{R}^2$

[0,5 pt] La matrice de passage de B_{can} à B est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

[0,5 pt] Son inverse est $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, matrice de passage de B à B_{can}.

[0,5 pt] Ses colonnes donnent $e_1 = 3v_1 - 2v_2 = (3, -2)_B$ et $e_2 = -v_1 + v_2 = (-1, 1)_B$.

2. [3x0,5 pt] On a par définition $p(v_1) = v_1$, $p(v_2) = 0$ d'où $M = \mathrm{Mat}_B(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. [1 pt] On a $M = P^{-1}NP \Leftrightarrow N = PMP^{-1}$.

4. [1 pt] On calcule

$$N = PMP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

[0,5 pt] On a $N^2 = N$, comme pour toute matrice de projection.

Exercice 3 - Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$. Pour λ paramètre réel, on note $A_\lambda = A - \lambda I$.

1. Calculer les rangs de $A_0(= A)$ et A_3.

2. Les matrices A et A_3 sont-elles inversibles ? Sinon, donner des bases de $\ker A$ et $\ker A_3$.

3. Déduire de ces calculs que l'on peut trouver une base $B = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de l'application linéaire f associée à A s'écrive $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

4. La matrice A_λ est-elle inversible pour $\lambda \neq 0$ et 3 ? (On pourra raisonner dans la base B.)

Réponses.

1. [2 pts] On échelonne A et A_3. On a $\text{rang}(A) = \text{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$ et

$$\text{rang}(A_3) = \text{rang}\begin{pmatrix} \boxed{-2} & 1 & 1 \\ 0 & -3/2 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & -3/2 \end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix} \boxed{-2} & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-3/2} & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\,.$$

2. [1 pt] Les matrices 3×3 A et A_3 ne sont pas inversibles car de rangs différents de 3.

[0,5 pt] On a $v = (x, y, z) \in \ker A \Leftrightarrow Av = 0 \Leftrightarrow x + y + z = 0 \Leftrightarrow x = -y - z$. $\ker A$ est donc le plan engendré par $v_1 = (-1, 1, 0)$ et $v_2 = (-1, 0, 1)$.

[0,5 pt] On a $v = (x, y, z) \in \ker A_3 \Leftrightarrow A_3 v = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{-2x} + y + z = 0 \\ -3y/2 + 3z/2 = 0 \\ 3y/2 - 3z/2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z\,.$$

L'espace $\ker A_3$ est donc la droite engendrée par $v_3 = (1, 1, 1)$.

3. [1,5 pts] Comme $Av_3 = 3v_3 \neq 0$, v_3 n'est pas dans $\ker A = \text{Vect}(v_1, v_2)$ et la famille $B = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Par constrution, on a $Av_1 = Av_2 = 0$ et $Av_3 = 3v_3$ et donc dans cette base

$$\text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = D\,.$$

4. [1 pt] Dans la base B la matrice de $f_\lambda = f - \lambda I$ s'écrit $D_\lambda = D - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3 - \lambda \end{pmatrix}$.

Elle est de rang 3 et donc inversible si $\lambda \neq 0$ et 3. Cela signifie que f_λ est un isomorphisme et donc que A_λ est inversible dans ces cas. (Le rang d'une application linéaire est la dimension de son image, et ne dépend donc pas de la base de travail.)

Exercice 4 - Pour a paramètre réel donné, on considère la matrice $M_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs de a la matrice M_a est-elle diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$?

2. On suppose désormais que $|a| < 2$ et on écrit $a = 2\cos\theta$ pour un $\theta \in]0, \pi[$.

Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de l'application linéaire f_a associée à M_a s'écrive $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ (on ne demande pas de déterminer cette base).

Que vaut $(R_\theta)^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$?

3. On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant $u_{n+2} = au_{n+1} - u_n$ avec $a = 2\cos\theta$ et $\theta \in]0, \pi[$.

Montrer à l'aide de la question précédente qu'il existe des réels C_1 et C_2 tels que

$$u_n = C_1 \cos(n\theta) + C_2 \sin(n\theta)\,.$$

Réponses.

1. [1 pt] Le polynôme caractéristique de M_a est

$$P_{M_a}(\lambda) = \det(M_a - \lambda I) = \lambda^2 - (\operatorname{Tr} M_a)\lambda + \det M_a = \lambda^2 - a\lambda + 1\,.$$

Le discrimininant est $\Delta = a^2 - 4$.

[3x0,5 pts] • Si $|a| > 2$, on a $\Delta > 0$. La matrice M_a possède 2 valeurs propres réelles discinctes et est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$.

• Si $|a| < 2 \Leftrightarrow a \in]-2, 2[$, on a $\Delta < 0$ et M_a n'est pas diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$.

• Si $a = \pm 2$, $\Delta = 0$. La matrice M_a a une valeur propre double $\lambda = a/2$. Comme M_a n'est pas (déjà) diagonale, elle n'est pas diagonalisable.

2. [1 pt] Pour $a = 2\cos\theta$, on a $P_{M_a}(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1$ avec $\Delta = 4\cos^2\theta - 4 = -4\sin^2\theta < 0$. Les valeurs propres complexes de M_a sont

$$\lambda_\pm = \frac{2\cos\theta \pm 2i\sin\theta}{2} = \cos\theta \pm i\sin\theta\,.$$

D'après le cours, il existe une base B dans laquelle

$$\mathrm{Mat}_B(f_a) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = R_\theta\,.$$

[0,5 pt] R_θ est la matrice de la rotation d'angle θ. On a donc $(R_\theta)^n = R_{n\theta} = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$.

3. [1 pt] En posant $X(n) = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$, on a

$$X(n+1) = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ -u_n + au_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = M_a X(n)\,.$$

[1 pt] On a donc $X(n) = M_a^n X(0)$, avec

$$M_a^n = P(R_\theta)^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix} P^{-1}\,.$$

Les composantes de $X(n)$, et en particulier u_n, sont des combinaisons linéaires fixes de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ (dépendant des coefficients de P, P^{-1}, u_0 et u_1), comme souhaité.