

## Feuille TD 8 - Applications linéaires

**Exercice 1.** Montrer que les applications ci-dessous sont linéaires, les caractériser géométriquement et faire un dessin.

1.  $f_1(x, y) = (-x, -y)$ ,
2.  $f_2(x, y) = (3x, 3y)$ ,
3.  $f_3(x, y) = (x, -y)$ ,
4.  $f_4(x, y) = (-x, y)$ ,
5.  $f_5(x, y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)$ .

**Exercice 2** (symétrie axiale). Soit  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = 0\}$ .

1. Montrer que  $D$  est une droite vectorielle de  $\mathbb{R}^2$ , c'est à dire que c'est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de  $\mathbb{R}^2$ . En donner un vecteur directeur.
2. Soit  $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'application définie par  $s(x, y) = 2\frac{ay-bx}{a^2+b^2}(-b, a) - (x, y)$ . Montrer que  $s$  est une application linéaire.
3. Calculer l'image d'un vecteur qui appartient à  $D$  puis calculer l'image d'un vecteur orthogonal à  $D$ , par exemple le vecteur  $(a, b)$ .
4. En déduire la nature de l'application linéaire  $s$ .

**Exercice 3.** Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $f(x, y, z) = (2x - y, z, 0)$ .

1. Montrer que  $f$  est une application linéaire.
2. Calculer le rang  $\text{rg}(f)$  de  $f$ .
3. Déterminer le noyau  $\ker(f)$  de  $f$  puis donner sa dimension. L'application  $f$  est-elle injective ?
4. Que vaut  $\text{rg}(f) + \dim \ker(f)$  ? Commenter.

**Exercice 4** (projecteur orthogonal). Soit  $\vec{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  et soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = \frac{ax + by + cz}{a^2 + b^2 + c^2}(a, b, c).$$

1. Montrer que  $f$  est une application linéaire.
2. Montrer que  $f \circ f = f$ .
3. Déterminer l'image et le noyau de  $f$ .

**Exercice 5.** Soit  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  et soit  $g : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^r$  deux applications linéaires. Montrer que  $g \circ f$  est aussi une application linéaire.

**Exercice 6.** Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(x, y, z) \mapsto (x + y - z, x - 2y + 3z)$ . Donner la matrice de  $f$  dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 7.** Soit  $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$  une base de  $\mathbb{R}^3$ . On note  $f$  l'application linéaire définie par  $f(e_1) = e_3$ ,  $f(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$  et  $f(e_3) = e_3$ .

1. Écrire la matrice  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
2. Déterminer le noyau de  $f$ .
3. On pose  $f_1 = e_1 - e_3$ ,  $f_2 = e_1 - e_2$  et  $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$ . Calculer  $e_1, e_2, e_3$  en fonction de  $f_1, f_2, f_3$ .
4. Montrer que  $\mathcal{B}' = \{f_1, f_2, f_3\}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

5. Écrire la matrice  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$ . En déduire la nature de l'application  $f$ .
6. On introduit la matrice  $P$  suivante :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que  $P$  est inversible et donner son inverse  $P^{-1}$ .

7. Montrer que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)P$ .