

## Feuille TD 7 - Bases et dimension des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

**Exercice 1.** Donner un exemple de famille  $\mathcal{F}_1$  qui est libre mais pas génératrice et un exemple de famille  $\mathcal{F}_2$  qui est génératrice mais pas libre dans  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercice 2.** Montrer que les vecteurs  $\vec{v}_1 = (0, 1, 1)$ ,  $\vec{v}_2 = (1, 0, 1)$  et  $\vec{v}_3 = (1, 1, 0)$  forment une bases de  $\mathbb{R}^3$ . Est-ce que les vecteurs  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  forment une base de  $\mathbb{R}^3$  ?

**Exercice 3.** Montrer que l'ensemble  $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  et en donner une base. Quel est la dimension de  $F$  ?

**Exercice 4.** Soit  $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^n$  deux sous-espaces vectoriels tels que  $F_1 \subset F_2$ . Montrer que  $\dim(F_1) \leq \dim(F_2)$ .

**Exercice 5.** Soit  $\mathcal{F} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_d\}$  une famille de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . Montrer que  $\mathcal{F}$  est liée si et seulement l'un des vecteurs de  $\mathcal{F}$  est une combinaison linéaire des autres vecteurs de  $\mathcal{F}$ .

**Exercice 6 (Idempotence des bases).** Soit  $F \subset \mathbb{R}^n$  un sous-espace vectoriel. Le but de cet exercice est de montrer que toutes les bases de  $F$  ont le même cardinal.

1. Soit  $k, \ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  tels que  $k < \ell$  et soit  $A \in \text{Mat}_{k, \ell}(\mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe un vecteur colonne non nul  $X \in \mathbb{R}^\ell$  tel que  $AX = 0$ . On pourra commencer par le cas où la matrice  $A$  est échelonnée.

Soient  $\mathcal{F}_1 = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$  une famille génératrice de  $F$  et soit  $\mathcal{F}_2 = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_\ell\}$  une famille libre de  $F$ . Par définition du fait que  $\mathcal{F}_1$  est génératrice, on peut trouver pour tout  $j \in \{1, \dots, \ell\}$  des scalaires  $a_{1,j}, \dots, a_{k,j} \in \mathbb{R}$  tels que

$$\vec{v}_j = a_{1,j} \cdot \vec{u}_1 + \dots + a_{k,j} \cdot \vec{u}_k$$

et soit  $A = (a_{i,j})$ .

2. Soit  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_\ell \end{pmatrix}$ . Montrer que si  $AX = 0$ , alors  $\sum_{j=1}^{\ell} x_j \vec{v}_j = 0$ .
3. En déduire que  $k \geq \ell$ .
4. Conclure que toute les bases de  $F$  ont le même cardinal.