Feuille TD 6 - Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

Exercice 1. Soit $F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = x^3\right\}$. Est-ce que F est un sous-espace vectoriel ?

Exercice 2. Soit $F \subset \mathbb{R}^n$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. F est stable par l'addition : $\forall \vec{u}, \vec{v} \in F$, $\vec{u} + \vec{v} \in F$,
2. F est homogène : $\forall \vec{v} \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot \vec{v} \in F$.

Donner un exemple de sous-ensemble $F \subset \mathbb{R}^n$ qui vérifie la seconde condition ci-dessus mais qui n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 3. Soit $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que la famille des vecteurs colonnes de A est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(A)$.

Exercice 4. Considérons le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ suivant :

$$P = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y = 0\right\}.$$

Montrer que P est un sous-espace vectoriel et en donner une famille génératrice.

Exercice 5. Considérons le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ suivant :

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2x + 2y - z = 2x + 3y = 0\right\}.$$

Trouver une matrice A telle que $D = \mathrm{Ker}(A)$ et en déduire que D est un sous-espace vectoriel. Donner une famille génératrice de D.

Exercice 6. Considérons les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$P_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2x - y - z = 0\right\}, \quad P_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x - y - z = 0\right\}.$$

Trouver une matrice A telle que $\mathrm{Ker}(A) = P_1 \cap P_2$ et donner une famille génératrice de $P_1 \cap P_2$. Montrer que $P_1 \cup P_2$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.