Feuille TD 3 - Matrices

Exercice 1. Soient les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer $2A - 3B$.

Exercice 2. Soit $A, B \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que si $A + B = 0_{m,p}$ alors $B = 0_{m,p}$.

Exercice 3. Soient les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Peut-on multiplier A par B ? Si oui, quelle est la taille de la matrice $C = A \times B$?
2. Calculez la matrice $C = A \times B$.
3. Peut-on multiplier B par A ? Pourquoi ?

Exercice 4. Soit D la matrice de taille $n \times n$ suivante :

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

Pourquoi, selon vous, dit-on que la matrice D est diagonale ? Calculer par récurrence sur k la matrice $D^k = D \times D \times \cdots \times D$ (il y a k facteurs). On pourra commencer par le cas où $n = 2$ pour simplifier.

Exercice 5. Soient les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que B est l'inverse de A.

Exercice 6. Soit la matrice suivante

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

En résolvant un système linéaire, déterminer pour quelles valeurs de λ la matrice A_λ est inversible et calculer son inverse dans ce cas.