Feuille TD 2 - Initiation aux systèmes linéaires

Exercice 1. Résolution de systèmes linéaires

1. Trouver tous les $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$E_1 : \left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & 2y & = & 3 \\ 4x & + & 5y & = & 6 \end{array} \right.$$

2. Trouver tous les $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$E_2 : \left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & 2y & = & 3 \\ 4x & + & 5y & = & 6 \end{array} \right.$$

3. Trouver tous les $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$E_3 : \left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & z & = & 0 \end{array} \right.$$

Exercice 2. Droites et plans vectoriels, représentation paramétrique

On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivant :

$$D = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : x + y - z = 0 \text{ et } 2x - y - z = 0\Big\},$$

$$P = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : x + 5y - z = 0\Big\}.$$

1. Montrer que D est une droite vectorielle et en donner un vecteur directeur $\vec{v}$.

On dit que l'écriture $D = \Big\{t \cdot \vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\Big\}$ est une représentation paramétrique de D.

2 Montrer que P est un plan vectoriel et donner deux vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_1$ qui l'engendrent.

On dit que l'écriture $P = \Big\{s \cdot \vec{v}_1 + t \cdot \vec{v}_2 \mid (s, t) \in \mathbb{R}^2\Big\}$ est une représentation paramétrique de P.

3 La droite D est-elle contenue dans le plan P ?

Exercice 3. Droites affines et représentation cartésienne

Soit $a \in \mathbb{R}$ un nombre réel et soit $\vec{v}_a = (1, -a) \in \mathbb{R}^2$. On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :

$$D = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x + y = 2\Big\},$$

$$\Delta_a = \text{Vect}\left\langle \vec{v}_a \right\rangle + (1, 1) \ = \Big\{(1 + t, 1 - at) \ : t \in \mathbb{R}\Big\}.$$

1. Munir le plan d'un repère $\mathcal{R}$, puis tracer les représentations graphiques de D et de Δ_a pour quelques valeurs de a dans le plan muni de ce repère.
2. Étudier l'intersection $D \cap \Delta_a$ en fonction de la valeur de a.
3. Donner une équation cartésienne de Δ_a, c'est à dire trouver α, β, γ tels que

$$D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \alpha x + \beta y = \gamma\big\}.$$