L1S2 PCST/PCEU151 **2024-2025**
Mathématiques **Faculté des Sciences, Orsay**

Feuille de TD 01

Vecteurs, droites, plans, systèmes linéaires I

Exercice 1.— Représentation graphique dans les cas $n = 2$.

Dans $\mathbb{R}^2$ (cas $n = 2$). On considère trois points non alignés O, I, J et on construit la paire d'axes gradués associés, c'est à dire les deux droites (OI) et (OJ) sécantes en O telle que :

— La droite (OI) (axe des abscisses) est graduée en plaçant 0 en O et 1 en I,

— la droite (OJ) (axe des ordonnées) est graduée en plaçant 0 en O et 1 en J.

De la sorte, on forme un repère du plan $\mathscr{R} = (O, \vec{OI}, \vec{OJ})$.

On fait un dessin A LA REGLE !. On fera deux dessins, l'un avec une paire d'axes orthonormés (comme d'habitude), l'autre avec une paire d'axe en position quelconque. (Comment est la grille de repérage dans ce cas ?)

1. Sur le dessin, indiquer le repère $\mathscr{R}$ et placer les points de coordonnées (k, ℓ) pour k entier variant de -5 à $+5$ et ℓ entier variant de -2 à 2. Signaler les point $(-1, 2)$ et $(-3, 1)$.

2. Sur le dessin, pour $N = 5$, $M = 6$, placer les points (x_k, y_ℓ) d'abscisses $x_k = \frac{2k}{N}$, d'ordonnée $y_\ell = \frac{\ell}{3}$ pour k entier variant de $-2N$ à $+2N$, ℓ entier variant de $-M$ à M.

Combien de points comporte l'ensemble $\{(x_k, y_\ell) | k \in \{-2N, \dots, 2N\}, \ell \in \{-M, \dots, +M\}\}$?

3. Sur ce dernier dessin, placer (marquer) les points $A = (x_1, y_2)$, $B = (x_{-2}, y_{-1})$ et $C = (x_{-1}, y_1)$. Vérifier que $OACB$ est un parallélogramme.

Exercice 2.—

1. Dans $\mathbb{R}^2$, pouvez-vous exprimer le vecteur $(2, 3)$ comme combinaison linéaire des vecteurs $(3, 0)$ et $(1, -1)$? Et un vecteur (x, y) quelconque ?
2. Soient $v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (0, 1, 2)$ et $v_3 = (3, -1, 1)$. Vérifier que v_3 est combinaison linéaire de v_1 et v_2.

Exercice 3.— Dans $\mathbb{R}^3$, on considère l'ensemble E des solutions de l'équation $x + 2y + 3z = 0$.

1. Donner deux vecteurs non colinéaires v_1 et v_2 de E.
2. Montrer que E est le plan vectoriel engendré par v_1 et v_2.

Exercice 4.— Peut-on trouver un réel t tel que le vecteur $v = (1, 3t, t)$ soit combinaison linéaire des vecteurs $v_1 = (1, 3, 2)$ et $v_2 = (-1, 1, -1)$? Interpréter géométriquement ce résultat.

Exercice 5.— Soient $v_1 = (1, 1, 1)$ et $v_2 = (1, 2, 3)$.

1. Pour $v = (x, y, z)$ donné quelconque, traduire l'équation $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = v$ en un système linéaire (S) aux inconnues λ_1 et λ_2.
2. Échelonner ce système (c'est à dire le résoudre par élimination) et en déduire une équation cartésienne du plan P engendré par v_1 et v_2.

Exercice 6.— Droite définie par équations cartésiennes.

Montrer que la partie $D = \left\{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2y + 3z = 0 = x + y + z\right\}$ est une droite vectorielle et en donner un vecteur directeur.