Chapitre 8 - Applications linéaires

I - Définitions et premiers exemples.

Définition 1 : Soient $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $F \subseteq \mathbb{R}^p$ deux sous-espaces vectoriels. Une application f de $E \to F$ est dite linéaire si elle respecte les combinaisons linéaires, c'est à dire :

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$f(\lambda . \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v}).$$

Exemples :

- Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ qui envoie $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sur $\begin{pmatrix} -2x \\ y+3z \end{pmatrix}$.

  f est linéaire. En effet, si on a $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$

et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ alors

$$f(\lambda \vec{u} + \mu v) = f\begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu x_2 \\ \lambda y_1 + \mu y_2 \\ \lambda z_1 + \mu z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2(\lambda x_1 + \mu x_2) \\ (\lambda y_1 + \mu y_2) + 3(\lambda z_1 + \mu z_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2\lambda x_1 - 2\mu x_2 \\ \lambda(y_1 + 3z_1) + \mu(y_2 + 3z_2) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2x_1 \\ y_1 + 3z_1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2x_2 \\ y_2 + 3z_2 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v}).$$

$\bullet$ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ n'est pas linéaire

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 \\ y \end{pmatrix}$

En effet, si $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\lambda = 2$, $\mu = 0$

$f(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = f\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ mais $\lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

c'est la présence du carré dans la définition de f qui pose problème.

$\bullet$ $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ avec $A = M_{n,p}(\mathbb{R})$.

$\bullet$ l'application nulle : $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $f(\vec{u}) = \vec{0}$ est linéaire

$\bullet$ l'application identité $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $f(\vec{u}) = \vec{u}$ est linéaire

<u>proposition 1</u> Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire.

On a :

$\bullet$ $f(\vec{0}_{\mathbb{R}^n}) = \vec{0}_{\mathbb{R}^p}$

$\bullet$ $f(-\vec{u}) = -f(\vec{u})$.

$\bullet$ $f\left(\sum_{i=1}^{d} \lambda_i \vec{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i f(\vec{v}_i)$

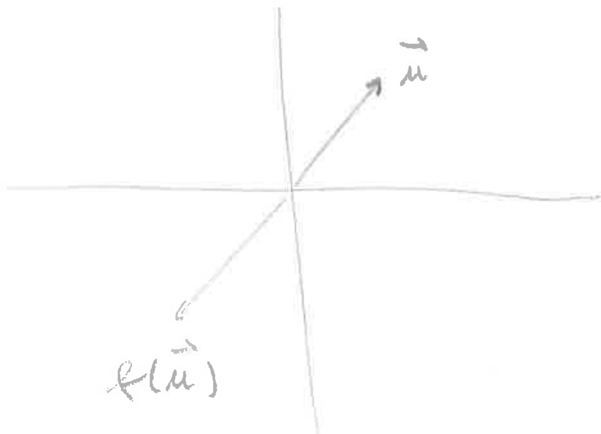
preuve à la fin du chapitre.

II – Exemples géométriques

1) Symétrie centrale

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$\vec{u} \longmapsto -\vec{u}.$$

f est linéaire. Elle s'appelle la symétrie centrale par rapport à l'origine.

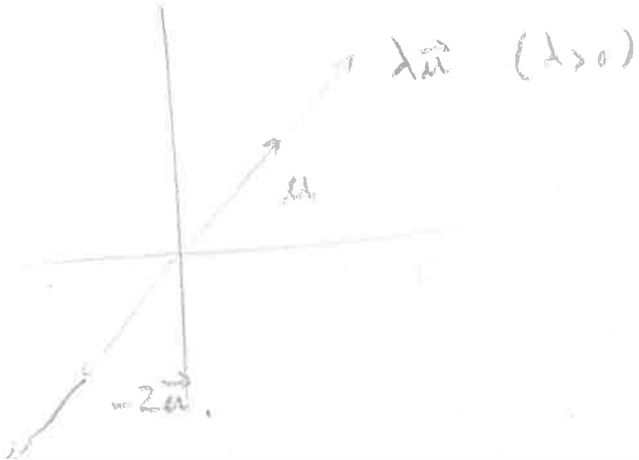


2) Homothétie. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$\vec{u} \longmapsto \lambda\vec{u}.$$

est l'homothétie de rapport λ.

linéaire.



Remarque : Si $\lambda = 1$, c'est l'application identité.

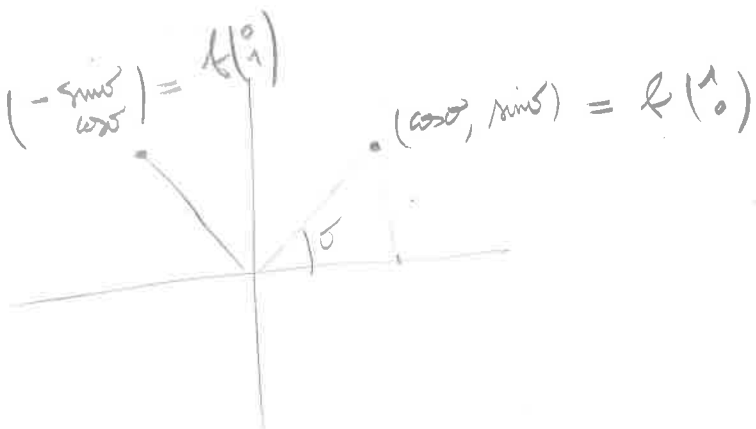
$\lambda = 0$ " " nulle

$\lambda = -1$ " " sym centrale.

3. Rotations de $\mathbb{R}^2$.

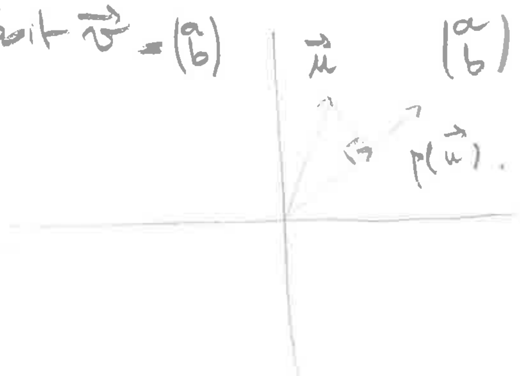
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ \sin\theta\, x + y\cos\theta \end{pmatrix}$$ linéaire.



4. Projection orthogonale.

Soit $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$



$$p : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \dfrac{ax+by}{a^2+b^2} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{array}$$

est linéaire c'est la projection orthogonale sur la droite engendrée par $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Exo : Calculer l'image par p de $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et de $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

III – Géométrie des applications linéaires.

1) Image d'une application linéaire.

Définition 2 : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire

l'image de f, noté $\mathrm{Im}(f)$, est l'ensemble des vecteurs

de $\mathbb{R}^p$ qui sont l'image d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

$$\mathrm{Im}(f) = \left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^p \mid \exists \vec{u} \in \mathbb{R}^n \text{ tq } f(\vec{u}) = \vec{v} \right\}.$$

Proposition 2 : l'image d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel.

preuve en exo

Def 3. le rang de f ($\mathrm{rg}(f)$) est la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

2) Noyau d'une application linéaire.

Définition 3 : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire

le noyau de f, noté $\mathrm{Ker}(f)$ est l'ensemble des vecteurs

de $\mathbb{R}^n$ dont l'image par f est nulle.

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid f(\vec{v}) = \vec{0}_{\mathbb{R}^p} \right\}.$$

<u>Proposition 3</u> : le noyau d'une application linéaire est un sous espace vectoriel.

<u>preuve</u> en exo.

<u>Proposition 4</u> : Soit f une application linéaire. f est injective si, et seulement si, $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$.

<u>preuve</u> : $\boxed{\Rightarrow}$ Si $f(\vec{v}_1) = f(\vec{v}_2)$ alors $f(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \vec{0}_{\mathbb{R}^p}$ donc $\vec{v}_1 - \vec{v}_1 \in \mathrm{Ker}(f)$ donc $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si f est injective et $\vec{v} \in \mathrm{Ker}(f)$ alors $f(\vec{v}) = \vec{0}_{\mathbb{R}^p}$ mais $f(\vec{0}_{\mathbb{R}^n}) = \vec{0}_{\mathbb{R}^p}$ par prop Δ donc par injectivité $\vec{v} = \overrightarrow{\mathbb{R}^n}$.

3 – <u>théorème du rang</u>

<u>Théorème 1</u> : Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une application linéaire.

On a :

$$n = rg(f) + \dim \mathrm{Ker}(f).$$

<u>IV – Applications linéaires et base</u>

" une application linéaire est complètement déterminée par l'image d'une base !"

<u>Théorème 2</u> : Soit $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\} = \mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$ et soit $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ une famille de $\mathbb{R}^p$. Il existe une application linéaire f telle que $f(\vec{u}_i) = \vec{v}_i \quad \forall i = 1, \dots, n$ et cette application linéaire est unique.

Existence :

preuve : Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ et soit $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$. On définit $f(\vec{u}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \vec{v}_i$.

Ceci définit une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

Comme $\vec{u}_i$ a pour coordonnées $(0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{position } i}}{1}, 0, \dots, 0)$ dans la base $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$. On a bien $f(\vec{u}_i) = \vec{v}_i$.

Mq f est linéaire. Soient $\vec{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}^{\mathcal{B}}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}^{\mathcal{B}}$

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors : $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 + \mu y_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n + \mu y_n \end{bmatrix}^{\mathcal{B}}$.

donc $f(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + \mu y_i) \vec{v}_i$

$$= \lambda \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{v}_i}_{f(\vec{u})} + \mu \underbrace{\sum_{i=1}^{n} y_i \vec{v}_i}_{f(\vec{v})}.$$

$$= \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v}).$$

Unicité. Supposons que g est une autre application qui envoie $\vec{u}_i$ sur $\vec{v}_i$. Mq $f = g$. Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$.

et $\vec{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}^{\mathcal{B}}$, c'est à dire que $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{v}_i$

Alors par linéarité : $g(\vec{u}) \underset{\text{prop 1.}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i\, g(\vec{u}_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{v}_i = f(\vec{u})$

---

preuve proposition 1.

- On a $\vec{0}_{\mathbb{R}^n} = 0 \cdot \vec{0}_{\mathbb{R}^n}$ donc par linéarité

$$f(\vec{0}_{\mathbb{R}^n}) = f(0 \, \vec{0}_{\mathbb{R}^n}) = 0 \, f(\vec{0}_{\mathbb{R}^n}) = \vec{0}_{\mathbb{R}^p}.$$

- linéarité avec $\lambda = -1$.

- Par récurrence $f(\lambda_1 \vec{v}_1 + \underbrace{\cdots + \lambda_d \vec{v}_d}_{1 \cdot \vec{v}})$

$$= \lambda_1 f(\vec{v}_1) + 1 \, f(\lambda_2 \vec{v} + \cdots + \lambda_d \vec{v}_d).$$

$$= \lambda_1 f(\vec{v}_1) + \lambda_2 f(\vec{v}_2) + f(\lambda_3 \vec{v}_3 + \cdots + \lambda_d \vec{v}_d)$$

$$= \cdots$$

$$= \sum_{i=1}^{d} \lambda_i f(\vec{v}_i).$$

IV - Applications linéaires et Matrices.

Dans l'exemple 3 qui suit la définition d'application linéaire, on a vu que une matrice définit une application linéaire $X \longmapsto AX$. Nous allons voir la réciproque.

Définition 4: Soit $\mathcal{B}_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de $\mathbb{R}^n$ et soit $\mathcal{B}_2 = \{f_1, \dots, f_p\}$ une base de $\mathbb{R}^p$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire. On appelle matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f)$, la matrice de $M_{p,n}(\mathbb{R})$ dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est faite des coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}_2$. Plus précisément, c'est la matrice de coordonnées (m_{ij}) telle que $\forall j = 1, \dots, n \quad f(e_j) = \sum_{k=1}^{p} m_{kj} f_k$.

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,j} & m_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{p,1} & m_{p,j} & m_{p,n} \end{pmatrix} =: \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f) \\ \uparrow \qquad\quad \uparrow \qquad\quad \uparrow \\ f(e_1) \quad f(e_j) \quad f(e_n) \end{array}$$

Remarque: Quand $p = n$ et $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$, on note simplement $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f)$ au lieu de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f)$.

Exemple : • Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x + z \\ y - y \end{pmatrix} \end{array}$. f est une application linéaire.

Soit $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$; soit
$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. et soit
$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ une autre base de $\mathbb{R}^2$.

calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_2}(f)$.

• Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta) x - \sin(\theta) y \\ \sin(\theta) x + \cos(\theta) y \end{pmatrix} \end{array}$ la rotation d'angle θ

Calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Proposition 5. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une application linéaire soit $\mathcal{B}_1$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et soit $\mathcal{B}_2$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$. Alors f coïncide avec l'application $X \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f) \cdot X$

preuve. Écrivons $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1}(f) = (m_{ij})$. Par définition :

$$f\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_j} = \sum_{i=1}^{p} m_{ij} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{f_i} = \begin{pmatrix} m_{1j} \\ \vdots \\ m_{pj} \end{pmatrix}$$

Par ailleurs $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{1j} \\ \vdots \\ m_{pj} \end{pmatrix}$.

Donc l'application $X \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f) X$ coïncident avec f sur $\mathcal{B}_1$ donc elles sont = par le théorème 2.