Chap 7 : Bases des sev et dimension

Le but de ce chapitre est de généraliser la notion de bases d'un sev que vous connaissez dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

I – familles liées / familles libres

<u>Définition 1</u> : Soit $\mathcal{F} = \{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_d}\}$ une famille de d vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On dit que $\mathcal{F}$ est <u>liée</u> si il existe des scalaires non tous nuls $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$ tq :

$$\lambda_1 \cdot \vec{v_1} + \dots + \lambda_d \cdot \vec{v_d} = \vec{0}_{\mathbb{R}^n}$$

Dans le cas contraire, on dit que $\mathcal{F}$ est <u>libre</u>.

On a déjà vu cette notion quand $\mathcal{F}$ a deux éléments (colinéaires) ou trois (coplanaires).

<u>Exemples</u> :

- Si $\mathcal{F}$ a un seul vecteur $\vec{v}$, alors elle est $\begin{cases} \text{libre si } \vec{v} \neq \vec{0}_{\mathbb{R}^n} \\ \text{liée si } \vec{v} = \vec{0}_{\mathbb{R}^n} \end{cases}$

- une famille comportant le vecteur nul est toujours liée.

- Est-ce que la famille $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est libre ?

fin cours 7 2025 —

- la famille $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 1)$ <u>libre</u>

II - Critère de liberté dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Proposition 1 Une famille à au moins $n+1$ vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ est liée.

preuve dans le cas de 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^2$.

Soient $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$; $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

Pour mq $\mathcal{F} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est liée, on cherche $a, b, c \in \mathbb{R}$ non tous les 3 nuls tels que :

$$a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3 = \vec{0}_{\mathbb{R}^2}.$$

c'est équivalent au système matriciel suivant :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

On peut supposer que aucun de $\vec{v}_i$ est nul sinon le résultat découle de la partie précédente. quitte à échanger les indices on peut aussi supposer que $\vec{v}_1 \neq 0$. la forme echelonnée reduite A_0 de A est donc de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

et $*$ est équivalent au système matriciel

$$A_0 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ qui se résoud facilement.

Proposition 2 : Soient $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

la famille $\mathcal{F} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est liée si et seulement si

$ab - bc = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = 0$.

Définition 1. Soient $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$; $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

le produit vectoriel de v_1 et v_2, noté $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ est

le vecteur : $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b & \beta \\ c & \gamma \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} c & \gamma \\ a & \alpha \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & \alpha \\ b & \beta \end{vmatrix} \end{pmatrix}$

Proposition 3 : Soient $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ la famille $\mathcal{F} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

est liée si et seulement si $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \vec{0}_{\mathbb{R}^3}$

preuve : Si $\mathcal{F}$ est lié alors soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tq $\lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2 = \vec{0}_{\mathbb{R}^3}$

avec $\lambda \neq 0$ ou $\mu \neq 0$. Notons :

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$; $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.

on alors le système :

$$\begin{cases} \lambda a + \mu \alpha = 0 \\ \lambda b + \mu \beta = 0 \\ \lambda c + \mu \gamma = 0 \end{cases}$$

En particulier λ, μ solutions des 3 systèmes linéaires 2x2 suivants :

$$\begin{cases} ax + \alpha y = 0 \\ bx + \beta y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax + \alpha y = 0 \\ cx + \gamma y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} bx + \beta y = 0 \\ cx + \gamma y = 0 \end{cases}$$

Or $x = 0$ et $y = 0$ sont des solutions évidentes de ces systèmes et comme $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ par hypothèse, on sait que aucun des ces 3 systèmes n'est de Cramer : Il découle du théorème 2 du chapitre 2. que

$$\begin{vmatrix} a & \alpha \\ b & \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & \beta \\ c & \gamma \end{vmatrix} = 0$$

Autrement dit $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \vec{0}_{\mathbb{R}^3}$.

Réciproquement, si $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \vec{0}_{\mathbb{R}^3}$. On peut supposer sans perte de généralité que $a \neq 0$. posons $\lambda = -\frac{\alpha}{a}$ et $\mu = 1$.

Mq $\lambda \vec{v}_1 + c \vec{v}_2 = \vec{0}_{\mathbb{R}^3}$.

$$\begin{cases} \lambda a + \mu\alpha = 0 \\ \lambda b + \mu\beta = -\frac{\alpha}{a} b + \beta = \frac{\beta a - \alpha b}{a} = \frac{\begin{vmatrix} a & \alpha \\ b & \beta \end{vmatrix}}{a} = 0 \\ \lambda c + \mu\gamma = -\frac{\alpha}{a} c + \gamma = \frac{\gamma a - \alpha c}{a} = \frac{\begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \gamma \end{vmatrix}}{a} = 0 \end{cases}$$

Proposition 4 : Soient $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$; $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$; $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

La famille $\mathcal{F} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est libre si et seulement si :

$$x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

preuve : admis pour le moment.

Exo : Mq la famille $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est libre.

III - familles génératrices.

On rappelle qu'une famille génératrice d'un sev $F \subseteq \mathbb{R}^n$ est une famille de vecteurs $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_d\}$ de F telle que $F = \mathrm{Vect}\langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_d \rangle$.

Proposition 5 : Soit F un sev de $\mathbb{R}^n \neq \{0\}$. Il existe une famille génératrice de F qui est aussi libre.

preuve : Il est facile de trouver une famille libre, par exemple une famille avec un seul vecteur non nul. On sait de plus que une famille de F constitué de plus de $n+1$ vecteurs est nécessairement liée d'après la proposition 1. Parmi toutes les familles libres de F, choisissons en une de cardinal maximal, notée $\mathcal{F}$.

Nous allons montrer que $\mathcal{F}$ est aussi génératrice !

Ecrivons $\mathcal{F} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_d\}$. On veut donc montrer que

pour tout $\vec{v} \in F$, $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$ tq $v = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \vec{v}_i$.

La famille $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_d, \vec{v}\}$ étant de cardinal plus grand que $\mathcal{F}$, elle doit être liée : $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_d, \lambda \in \mathbb{R}$ non tous nuls ! tq

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_d \vec{v}_d + \lambda \vec{v} = \vec{0}_{\mathbb{R}^n} . \quad *$$

Si $\lambda = 0$ alors $\sum_{i=1}^{d} \lambda_i \vec{v}_i = 0$ et alors $\lambda_1 = \dots = \lambda_d = 0$ par liberté de $\mathcal{F}$. C'est une contradiction car les $\lambda_1, \dots, \lambda_d, \lambda$ sont supposés non tous nuls ! donc $\lambda \neq 0 \dots$

et on a alors, par $*$ $v = -\frac{\lambda_1}{\lambda}\vec{v}_1 - \dots - \frac{\lambda_d}{\lambda}\vec{v}_d$.

c'est gagné ! $\blacksquare$

Définition 2 : une base d'un sev $F \subseteq \mathbb{R}^n$ est une famille libre et génératrice de F.

Théorème 1 (Idempotence des bases) : Soit $F \subseteq \mathbb{R}^n$ un sev. Toutes les bases de F ont le même cardinal.

Définition 3 : On appelle dimension de F le cardinal de n'importe laquelle de ces bases.

Proposition 6 : Soit $F \subseteq \mathbb{R}^n$ un sev et soit $\mathcal{F} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_d\}$ une base de F. Alors pour tout $\vec{v} \in F$, il existe un unique uplet $(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ tel que $\vec{v} = \sum_{i=1}^{d} x_i \vec{v}_i$.

preuve : la Famille $\mathcal{F}$ est une base donc elle est génératrice :
$\exists\, x_1, \dots, x_d$ tq $\vec{v} = \sum_{i=1}^{d} x_i \vec{v}_i$. Supposons qu'il existe un autre uplet $y_1, \dots, y_d$ tq $\vec{v} = \sum_{i=1}^{d} y_i \vec{v}_i$.

Alors : $\vec{0} = \vec{v} - \vec{v} = \sum_{i=1}^{d} x_i \vec{v}_i - \sum_{i=1}^{d} y_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{d} (x_i - y_i) \vec{v}_i$.

Comme $\mathcal{F}$ est une base, elle est en particulier libre. donc

$\forall i = 1, \dots, d \quad x_i - y_i = 0$ c'est à dire $x_i = y_i$ ce qui prouve l'unicité.

Définition 4 : On appelle coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{F}$ le d-uplet $(x_1, \dots, x_d)$ dans la proposition précédente.

On note $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{bmatrix}^{\mathcal{F}}$

Proposition 7: Soit $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ base de $\mathbb{R}^n$.

1. $\vec{v}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathcal{B}}$ ← position i.

2. Si $\vec{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}^{\mathcal{B}}$ et $\vec{v} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}^{\mathcal{B}}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

alors $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 + \mu y_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n + \mu y_n \end{bmatrix}^{\mathcal{B}}$

preuve: laissé en exo.