Chapitre 6 :

Sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

I - définitions

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Définition 1. Une sous ensemble $F \subseteq \mathbb{R}^n$ est appelé sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ (sev) si :

1) $0_{\mathbb{R}^n} \in F$

2) F est stable par combinaisons linéaires :

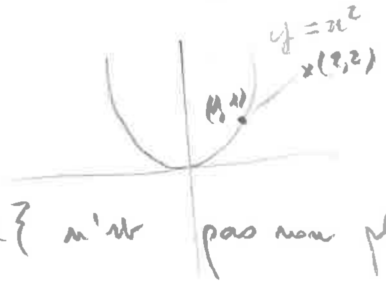
$$\forall x,y \in F \quad \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R} \quad \lambda x + \mu y \in F.$$

Exemples:

* Soit $\vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. la droite $\mathrm{Vect}(\vec{v})$ est un sev de $\mathbb{R}^n$

* Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ (non colinéaires). le plan $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ est un sev de $\mathbb{R}^n$.

* $\{(x, x^2) \in \mathbb{R}^2\}$ n'est pas un sev En effet, il contient $(1,1)$, mais pas $2(1,1) = (2,2)$.



* la droite affine $\{(1+t, -2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ n'est pas non plus un sev. car elle ne contient pas $(0,0)$.

Définition 2 : Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. On note $\mathrm{Im}(A)$ l'ensemble $\{ Y \in \mathbb{R}^p \mid \exists X \in \mathbb{R}^n \ AX = Y \} \subset \mathbb{R}^p$ c'est l'image de A

proposition 1 : $\mathrm{Im}(A)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$.

preuve : • $\vec{0}_{\mathbb{R}^p} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\vec{0}_{\mathbb{R}^p} \in \mathrm{Im}(A)$.

• Soient $Y_1 = AX_1$ et $Y_2 = AX_2 \in \mathrm{Im}(A)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Mq $\lambda Y_1 + \mu Y_2 \in \mathrm{Im}\, A$

On calcule $A(\underbrace{\lambda X_1 + \mu X_2}_{\in \mathbb{R}^n}) = \lambda \underbrace{AX_1}_{Y_1} + \mu \underbrace{AX_2}_{Y_2} \in$

$\mathrm{Im}\, A$. donc $\mathrm{Im}(A)$ stable par CL.

$\longrightarrow$ $\mathrm{Im}(A)$ est un sev.

Exo : Calculer $\mathrm{Im}(A)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

II – Familles génératrices.

proposition 2 : Soient $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_d \in \mathbb{R}^n$. le sous ensemble

$\mathrm{Vect}\langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_d \rangle$ est un sous ev de $\mathbb{R}^n$

Définition 3. Soit $F \subseteq \mathbb{R}^n$ un sev. Une famille génératrice de F est une famille $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_d$ telle que $F = \mathrm{Vect}\langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_d \rangle$.

Ex: Mq $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ est un sev et en donner une famille génératrice.

Prop 3: Im A est engendré par ses vecteurs colonnes.

III. Sev définis par équations cartésiennes.

Définition 4: Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. On note $\mathrm{Ker}(A)$ l'ensemble $\{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$ C'est le noyau de A (Kernel en anglais).

Proposition 4: Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. Ker A est un sev de $\mathbb{R}^n$.

Remarque: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \Leftrightarrow$

$$AX = 0 = \begin{pmatrix} x - y \\ 2x + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ Eq cartésienne.

Autrement dit $\mathrm{Ker}\, A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 2x + z = 0\}$.

IV - Intersection et réunion.

<u>Proposition 5</u> : Soient E et F deux sev de $\mathbb{R}^n$. Alors $E \cap F$ est un sev de $\mathbb{R}^n$.

<u>Exo</u> : Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\} \subseteq \mathbb{R}^2$

soit $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -y\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

Mq $E \cup F$ n'est <u>pas</u> un sev de E.