Chapitre 5 : Matrices et systèmes linéaires

I - Formulation matricielle des systèmes linéaires.

Considérons le système linéaire d'inconnues $x_1, \dots, x_p$ suivant

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a_{1,1}x_1 + & \cdots & + a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + & \cdots & + a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right. \qquad (E).$$

Ce système peut se réécrire de façon matricielle suivante

$$AX = B \qquad (E_{Mat})$$

où $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ Matrice associée au système linéaire (E)

$X = (x_i)_{1 \leq i \leq p} \in M_{p,1}(\mathbb{R})$

$B = (b_i)_{1 \leq i \leq n} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.

En effet, la ligne i de (E) correspond à l'égalité des coef en position $(i,1)$ dans (E_{Mat}).

⚠ Faire exemple 2×2

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{i,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \sum_{k=1}^{p} a_{ik} x_k \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_i \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{c'est } L_i \text{ !}$$

II – Matrices inversibles et systèmes linéaires

dans le cas $n = p$

<u>Proposition 1</u> Si la matrice A associé au système (E) est inversible, ce système possède une unique solution, donnée par $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = X = A^{-1} \cdot B$

<u>preuve</u> le système (E) est équivalent à l'équation matricielle $AX = B$. En multipliant cette égalité par A^{-1}, on obtient

$$\underbrace{A^{-1}A}_{I_n} X = A^{-1}B = I_n X = X$$

$\blacksquare$

Il est intéressant de remarquer que nous retrouvons un résultat du chapitre 2. En effet, considérons le système suivant
$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

ceci est équivalent à $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$

la proposition 6 du chapitre 3 affirme que la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible ssi $ad - bc \neq 0$ et auquel cas

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$ Par la proposition 1 ci-dessus

on obtient alors que l'unique solution du système est

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = X = A^{-1}B = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} de-bf \\ af-ec \end{pmatrix}$$

Autrement dit.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

Ce sont les formules de Cramer, vues au chapitre 2 (Théorème 2).

III – Matrices élémentaires et forme échelonnée, équation $AX=B$

Nous avons vu ci-dessus qu'un système linéaire conduit naturellement à étudier les équations matricielles de la forme

$$AX = B.$$

En fait, il n'y a aucune raison de se restreindre au cas où X et B sont des vecteurs colonnes : on peut considérer de telles équations avec $X \in M_{p,q}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{n,q}(\mathbb{R})$

On se fixe à partir de maintenant la tâche suivante.

Étant données $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{n,q}(\mathbb{R})$

Trouver toutes les matrices $X \in M_{p,q}(\mathbb{R})$ telles que

$$AX = B \qquad (E)$$

(Noter les indices n, p, q définissant A, X et B qui sont choisis pour être compatibles dans la multiplication matricielle.)

Comme pour les systèmes linéaires, cette équation est plus simple à résoudre quand A est sous une forme simple, que l'on appelle également échelonnée réduite. Voici la définition :

<u>Définition 1</u> Une matrice A est dite <u>échelonnée</u> si

- le nombre de zéros commençant une ligne croît strictement ligne par ligne, jusqu'à ce qu'il ne reste plus que des 0.

et elle est de plus dite <u>réduite</u> si

- le premier coefficient non nul d'une ligne non nulle vaut 1.
- et c'est le seul élément non nul de sa colonne.

<u>Ex</u> :

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ Echelonnée pas réduite (à cause du 2)

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Echelonnée pas réduite ($a_{12} \neq 0$)

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ pas échelonnée. ($a_{21} \neq 0$)

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Ech. réduite

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Ech réduite

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Ech. réduite.

<u>Définition 2</u> : les équations matricielles $A_1 X = B_1$ et $A_2 X = B_2$ sont équivalentes si elles ont le même ensemble des solutions.

La stratégie pour résoudre l'équation (E) sera donc de la remplacer par une équation matricielle plus simple qui est équivalente. (spoiler avec A échelonnée réduite...). Comme dans le cas des systèmes on va voir qu'on peut faire des opérations élémentaires pour remplacer (E) par une équation plus simple. Voici la liste de ces trois opérations.

1) $L_i \leftrightarrow L_j$ On échange les lignes i et j de A et de B. Ceci revient à remplacer A et B par $S_{ij}A$ et $S_{ij}B$ où S_{ij} est la matrice

$$\begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ 0 & & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & 1 & & & 0 \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

obtenue en échangeant les lignes i et j de la matrice $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$.

2) $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ On ajoute λL_j à la ligne L_i $(i \neq j)$ sur A et B

Ceci revient à remplacer A et B par $T_{ij}(\lambda)A$ et $T_{ij}(\lambda)B$

où $T_{ij}(\lambda) = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & \lambda \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \; i$ est la matrice obtenue en ajoutant λL_j à L_i sur I_n

3) $L_i \leftarrow \lambda L_i$ $(\lambda \neq 0)$ On multiplie la ligne i de A et B par λ. Ceci revient à remplacer A et B par $T_i(\lambda)$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

, la matrice obtenue en multipliant la ligne i de I_n par λ.

Proposition 2: Appliquer l'une des trois opérations élémentaires ci dessus à (E) la transforme en une équation équivalente.

preuve: Commençons par remarquer qu'on ne change pas l'ensemble des solutions quand on multiplie A et B par une matrice Q inversible. En effet:

$AX = B \Rightarrow QAX = QB$ et on peut multiplier par Q^{-1} pour revenir en arrière.

Il suffit alors de remarquer que S_{ij}, $T_{ij}(\lambda)$ avec $i \neq j$ et $T_i(\lambda)$ $(\lambda \neq 0)$ sont inversibles, d'inverse S_{ij} ; $T_{ij}(-\lambda)$; $T_i(\lambda^{-1})$.

■

IV - Pivot de Gauss Matriciel

Le pivot de Gauss Matriciel reprend l'algorithme vu pour les systèmes linéaires. La méthode est la suivante :

Partie A: Passage à une forme échelonnée

Etape A.1: (Choix du pivot) On considère la première colonne de A. Si elle ne contient que des zéros, on passe directement à l'étape A.3 ci dessous.

Si non, elle contient un terme non nul. On échange la ligne 1 avec la ligne qui contient ce coef non nul, on fait la même opération sur B.

A la fin de cette étape, la matrice A est remplacée par une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & * \\ * & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * \end{pmatrix}$

avec $a_{11} \neq 0$. (le symbole $*$ est une façon abregée d'écrire les coef sur lesquels on n'a pas d'information pour aller plus vite et ne pas perdre de temps à écrire les indices)

Etape A.2 (Elimination)

- Si la première colonne est faite que de 0, il n'y a rien à faire.
- Sinon $a_{11} \neq 0$ et on applique à A et B les transformations $L_i \leftarrow L_i - \dfrac{a_{i1}}{a_{11}} L_1$ à L_i pour $i = 2 \dots n$ pour éliminer les coef a_{i1} de A.

A la fin de cette étape, A est de la forme $\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$

avec a_{11} qui peut être nul ou non : la première colonne est échelonnée !

Etape A 3 (Boucle).

- Si $a_{11} = 0$ on repart au début de l'étape A_1 mais avec la matrice de taille $(n-1) \times p$ obtenue en oubliant la première colonne de A à la place de B.

- Si $a_{11} \neq 0$ on repart au début de l'étape A.1 mais avec la matrice de taille $(n-1) \times (p-1)$ obtenue en oubliant la première ligne et la première colonne de A à la place de A et la matrice de taille $(n-1) \times q$ en oubliant la première ligne de B à la place de B.

A chaque itération de la boucle, on travaille avec une matrice qui a une colonne en moins, l'algorithme s'arrête donc à un moment.

Partie B : Passage à une forme échelonnée.

Etape B.1 : On repère le premier élément non nul de chaque ligne de A et on multiplie la ligne correspondante de A et B par l'inverse de cet élément non nul.

A la fin de cette étape le premier coef non nul de chaque ligne de A est un 1. (le pivot)

Etape B2. On élimine chaque terme non nul au dessus des pivot en commençant en bas à droite. Il faut faire les mêmes opération à A et B.

Exemple : Trouver l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

On cherche $X \in M_3(\mathbb{R})$ tq $AX = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B}$.

On met A et $B = I_3$ côte à côte pour penser à faire la même opération à leurs lignes.

la première colonne de A est déjà echelonnée donc la première itération de l'étape A ne fait rien. On relance l'étape A en oubliant la première ligne et colonne de A et première ligne de B.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

le coef en haut à gauche est déjà non nul donc Etape A1 ok. On fait A2 : $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Etape A.3 : $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas nulle donc on repart avec

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{4} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{6} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Il n'y a plus qu'une ligne donc rien à faire.

On passe à B.

pour B1 on fait $L_1 \leftarrow L_1 \times 1$

$L_2 \leftarrow L_2 \times \frac{1}{2}$

$L_3 \leftarrow L_3 \times (-\frac{1}{2})$

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

B.2 : $L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3$

$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & +\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

on arrive au système plus simple :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X}_{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3/2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1/2 \end{pmatrix} \quad \text{donc } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$