# Chapitre 4 : Pivot de Gauss

* le but de ce chapitre est de donner une méthode générale de résolution des systèmes d'équations linéaires

## I – Définitions :

Définition 1 : . un système d'équations linéaires est échelonné si le nombre de coefficients nuls commençant une ligne croît strictement ligne après ligne.

. Il est échelonné réduit si de plus

- le premier coef non nul d'une ligne vaut 1.
- et c'est le seul élément non nul de sa colonne.

Exemple :

. $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 5 \\ 0 - x_2 - 2x_3 + 0 = 4 \\ 0 + 0 + 0 + 3x_4 = 1 \end{cases}$$ Echelonné pas réduit

. $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 5 \\ -2x_3 = 4 \\ x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$ pas échelonné

$$\begin{cases} x_1 + 0 + 2x_3 + 0 = 25 \\ 0 + x_2 - 2x_3 + 0 = 16 \\ 0 + 0 + 0 + x_4 = 1 \end{cases}$$ Echelonné et réduit

⚠ L'intérêt majeur des systèmes échelonnés réduit est qu'ils sont simples à résoudre. Par exemple le système précédent se résoud ainsi :

$$\begin{cases} x_1 = 25 - 2x_3 \\ x_2 = 16 + 2x_3 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

Soit encore : $\mathcal{S} = \{ (25 - 2t, 16 + 2t, t, 1) \mid t \in \mathbb{R} \}$.

## II – Opérations élémentaires sur les équations d'un système.

**Définition 2 :** Deux systèmes d'équations linéaires à $n$ inconnues sont *équivalents* s'ils possèdent le même ensemble de solutions.

Nous introduisons maintenant 3 opérations qui transforment un système en un autre système équivalent. L'idée est qu'on pourra composer judicieusement ces opérations pour obtenir un système équivalent bien plus simple à résoudre (Echelonné réduit ..). On en déduira alors l'ensemble des solutions de notre système de départ (par équivalence). Ces opérations sont les suivantes.

a) $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$ : On peut multiplier une équation par un réel non nul.

b) $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $j \neq i$ On peut ajouter à l'équation $L_i$ un multiple de l'équation $L_j$.

c) $L_i \longleftrightarrow L_j$ On peut échanger deux équations.

Proposition 1 Appliquer l'une des trois opérations élémentaires ci dessus à un système ne change pas ses solutions. Autrement dit, on le transforme en un système équivalent.

## III - L'algorithme du pivot de Gauss.

On va expliquer cette méthode algorithmique qui permet de trouver toutes les solutions d'un système. On va illustrer cette méthode sur des exemples

Etape 1 Passage à une forme echelonnée.

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} -x_2 + 2x_3 + 13x_4 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 17x_4 = 4 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 20x_4 = -1 \end{cases}$$

On échange $L_1 \leftrightarrow L_2$ (ou $L_1 \leftrightarrow L_3$) pour que le premier coef non nul de la première ligne soit non nul

On obtient.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_2 + 17x_4 = 4 \\ -x_2 + 2x_3 + 13x_4 = 5 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 20x_4 = -1 \end{cases}$$

On va utiliser le $x_1$ de la première ligne pour éliminer les $x_1$ des autres lignes. On dit que le pivot est en position $(1,1)$ (ligne 1, colonne 1). On applique $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ pour éliminer le $x_1$ de la ligne 3. Il n'y a rien à faire sur la ligne 2 car pas de $x_1$. On obtient.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_2 + 17x_4 = 4 \\ 0 - x_2 + 2x_3 + 13x_4 = 5 \\ 0 + x_2 + 0 - 3x_4 = 3 \end{cases}$$

On s'occupe maintenant de $x_2$. On fait $L_2 \leftarrow -L_2$ pour avoir un coef 1 devant $x_2$ dans la ligne 2.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_2 + 17x_4 = 4 \\ x_2 - 2x_3 - 13x_4 = 5 \\ x_2 - 3x_4 = 3 \end{cases}$$

le pivot est maintenant en position 2.

On fait maintenant disparaître le $x_2$ de la troisième ligne $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 17x_4 = 4 \\ x_2 - 2x_3 - 13x_4 = -5 \\ 2x_3 + 10x_4 = 8 \end{cases}$$

puis on multiplie $l_3 \leftarrow \frac{1}{2} l_3$ pour faire apparaître le pivot en position $(3,3)$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 17x_4 = 4 \\ x_2 - 2x_3 - 13x_4 = -5 \\ x_3 + 5x_4 = 4. \end{cases}$$

le système est maintenant échelonné.

## Etape 2 : Passage à une forme réduite

Pour passer à la forme réduite, on ajoute à une ligne des multiple adéquats des lignes situées au dessous d'elle en allant du bas à droite vers le haut à gauche.

Commençons par faire apparaître des $0$ sur la troisième colonne au dessus de $x_3$. $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 17x_4 = 4 \\ x_2 + 0 - 3x_4 = 3 \\ x_4 + 5x_4 = 4 \end{cases}$$

puis $L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 0 + 2x_4 = -8 \\ \quad\; x_2 \qquad\quad - 3x_4 = 3 \\ \qquad\qquad x_3 + 5x_4 = 4 \end{cases}$$

puis à la deuxième colonne en faisant d'abord $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad - 4x_4 = -2 \\ \quad x_2 \qquad\quad - 3x_4 = 3 \\ \qquad\quad x_3 + 5x_4 = 4 \end{cases}$$

le système est maintenant sous forme réduite.

Etape 3 : Solutions  On choisit $x_4 = t$ librement.

$$\begin{cases} x_1 = -2 + 4t \\ x_2 = 3 + 3t \\ x_3 = 4 + 5t. \end{cases}$$

$$\mathcal{S} = \{(-2+4t, 3+3t, 4+5t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Exo : Résoudre avec le pivot de Gauss.

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 7y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y \qquad = 0 \\ x + 4y + z = 0 \end{cases}$$