Chapitre 3 : Matrices

Exo : feuille de TD 03 : Matrices

1. Définitions

Définition 1 : Une matrice A de taille $n \times p$ est un tableau rectangulaire de nombres réels à n lignes et p colonnes. Les nombres du tableau A sont appelés "entrées" ou "coefficients" de A.
Le coefficient situé à la ligne i et colonne j est noté $a_{i,j}$ ou $[A]_{ij}$.

On représente un tel tableau de la manière suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Ou encore $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$

Exo 1 : $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$. Taille ?

coef $(1,1)$? $(2,2)$? $(1,3)$?

Définition 2 : . Deux matrices sont égales lorsqu'elles ont la même taille et que les coefficients correspondants sont égaux.

On note $M_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes.

2 _ Matrices particulières

- Si $n = p$ (les nombres de lignes et de colonnes coïncident) On dit que la matrice est carrée. On note $M_n(\mathbb{R})$ au lieu de $M_{n,n}(\mathbb{R})$.

- Si $n = 1$, on parle de matrice ligne. $A = (a_1 \dots a_p)$.
- Si $p = 1$, on parle de matrice colonne $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

- la matrice de taille $n \times p$ dont tous les coefficients sont des zéros est appelée la matrice nulle et notée $O_{n,p}$.

3 _ Opérations matricielles.

(Somme)

Définition 3 : Soient A et B deux matrices ayant même taille $n \times p$ leur somme $C = A + B$ est la matrice de taille $n \times p$ définies par

$$\boxed{c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}}$$

On additionne les coefficients correspondant.

Exercice : Si $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, que vaut $A + B$?

Définition 4 : (Produit d'une matrice par un scalaire)

Le produit de la matrice $A = (a_{ij})$ de taille $n \times p$ par le scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$ est la matrice $\alpha A = (\alpha . a_{ij})$, elle aussi de taille $n \times p$.

Exercice : Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\alpha = 2$, que vaut $\alpha . A$?

La matrice $(-1) . A$ est simplement notée $-A$, on l'appelle opposée de A. La différence $A - B$ est la matrice $A + (-1)B$.

Exo : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 7 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ Alors que vaut $A - B$?

Proposition 1 : $A, B, C \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1) $A + B = B + A$

2) $A + (B + C) = (A + B) + C$.

3) $A + 0_{n,p} = A$

4) $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$

5) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

Exo $A = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. $A+B = ?$ (Impossible)

$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$ $2A - 3C = ?$

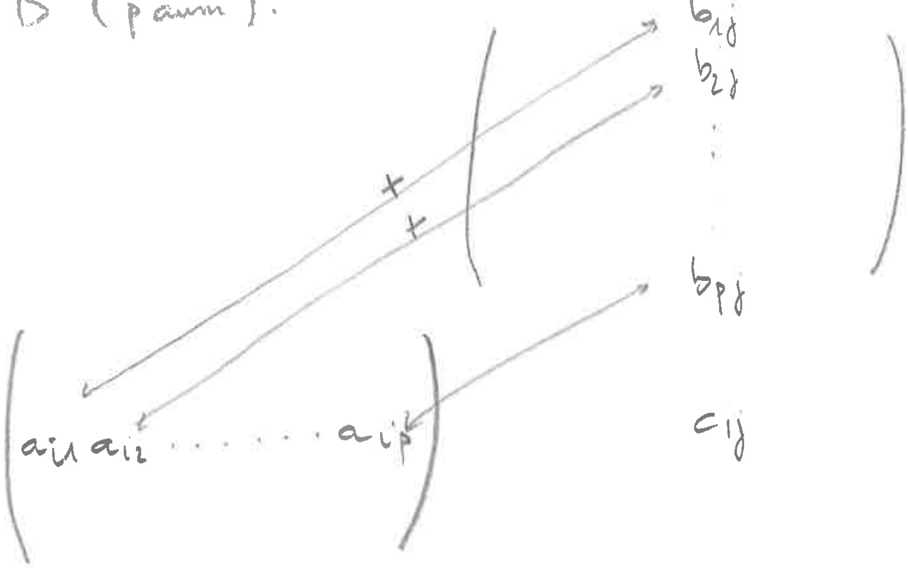
Définition 5 (produit) Soit $A = (a_{ij})$ de taille $n \times p$

$B = (b_{ij})$ de taille $p \times q$

Alors le produit $C = AB$ est la matrice de taille nq tq

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} = a_{i,1} b_{1,j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{i,p} b_{pj}.$$

⚠ On ne peut faire le produit AB que si le nombre de colonnes de A (p) est égal au nombre de lignes de B (p aussi).



<u>Exo</u> : Calculer le produit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ par $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>Proposition 2</u>.

1) $A(BC) = (AB)C$

2) $A(B+C) = AB + AC$ et $(B+C)A = BA + CA$.

3) $A \cdot 0 = 0$ et $0 \cdot A = 0$

4 - Pièges à éviter.

Piège 1 : Si A et B sont des matrices carrées de taille $n \times n$ on peut multiplier AB et BA. MAIS En général on n'a pas $AB = BA$. Exemple avec $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

Piège 2 : $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ ou $B = 0$.

Exemple avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

<u>Piège 3</u> : $AB = AC \not\Rightarrow B = C$.

Exemple avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

5 - Inverse d'une matrice

<u>Définition 6</u> : La matrice identité de taille n est la matrice $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

Proposition 3 :

Si A est une matrice de taille $m \times p$ Alors $I_m \times A = A \times I_q = A$

preuve avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Définition 7 : Soit A une matrice carrée de taille $m \times m$

On dit que A est <u>inversible</u> s'il existe une matrice carrée de taille B telle que $AB = BA = I_m$.

Proposition 4 : Une matrice B comme dans la définition 7 est unique.

preuve : Supposons qu'il existe B_1 et B_2 telles que $AB_1 = AB_2 = B_1A = B_2A = I_m$

alors $\underbrace{B_1A}_{I_m}B_1 = \underbrace{B_1A}_{I_m}B_2 \Rightarrow B_1 = B_2$.

On dit que la matrice B comme dans la déf. 7 précédente est <u>l'inverse de A</u>.

Exo : Mq A est inversible et trouver son inverse, où

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Mq $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Proposition 5 : Si A est inversible alors $AB = AC \Rightarrow B = C$.

proposition 6 : $n = 2$. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible ssi $ad - bc \neq 0$

et alors $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$