Chapitre 2 :

première initiation aux sys. linéaires

I - définitions générales

<u>Définition 1</u> : une équation linéaire d'inconnues $x_1, \dots, x_m$ est une équation de la forme.

$$(E) \quad a_1 x_1 + \dots + a_m x_m = b.$$

On dit que $(x_1, \dots, x_m)$ est solution de E si les x_i vérifient l'égalité (E). Résoudre (E) c'est trouver toutes les solutions de (E)

On note $\mathcal{L}_E = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \text{ solutions de } E\}$.

<u>Exemple</u> : $2x = -1 \; (E_1)$ est une equation d'inconnue x et

$$\mathcal{L}_{E_1} = \{(-\tfrac{1}{2})\}.$$

. $2x + 3y = 0 \; (E_2)$ est une équation d'inconnues x, y

et $\mathcal{L}_{E_2} = \{(-3t, 2t) ;\ t \in \mathbb{R}\}$.

<u>Définition 2</u> : Un système d'équations linéaires d'inconnues $x_1, \dots, x_m$ est une famille d'equations linéaires, toutes d'inconnues $x_1, \dots, x_m$.

$$(E) : \begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1,m} x_m = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + \dots + a_{nm} = b_n . \end{cases}$$

a_{ij} est à la $i^{\text{ème}}$ ligne de la j^{em} colonne.
ce sont les coef.

On dit que $(x_1, \dots, x_m)$ est solution de (E) si ses coord. vérifient toutes les équations linéaires qui apparaissent dans (E)

Résoudre (E) c'est trouver toutes les solutions de (E).

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à quelques cas particulier assez simples à resoudre (mais pas triviaux non plus !). Nous verrons le cas général, en particulier la methode du pivot de Gauss, plus tard dans le semestre

II - Système de une equation linéaire à deux inconnues

$$(E) : ax + by = c$$

cas 0 : $\boxed{a = b = 0}$ pas de solution, sauf si $c = 0$ et alors $\boxed{\mathcal{S}_E = \mathbb{R}^2}$!

Cas 1. $\boxed{a \neq 0}$ On choisit n'importe qu'elle valeur pour y, disons t et alors $x = \frac{(c - bt)}{a}$ convient. $\boxed{\mathcal{S}_E = \left\{\left(\frac{c - bt}{a}, t\right) : t \in \mathbb{R}\right\}}$

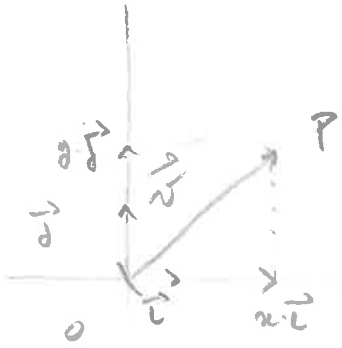
Cas 2 $\boxed{b \neq 0}$ On choisit n'importe quelle valeur de x, disons t et alors $y = \frac{c - at}{b}$ convient. $\boxed{\mathcal{S}_E = \left\{\left(t, \frac{c - at}{b}\right) : t \in \mathbb{R}\right\}}$

Exo : trouver l'ensemble des solutions de l'équation (E) suivante

$$(E) \quad 2x - 3y = 1$$

Représentation graphique : Soit $\mathcal{B}$ une base du plan et soit O une origine $(\mathcal{B}, O)$ est donc un repère du plan

On dit qu'un point P du plan a pour coordonnées (x,y) dans $\mathcal{R}$ lorsqu'on dessine le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées (x,y) dans la base $\mathcal{B}$ depuis le point O alors la tête de $\vec{v}$ est confondue avec P.



Alors l'ensemble des points de coordonnées (x,y) dans le repère $\mathcal{R}$ avec $(x,y) \in \mathcal{S}_E$ est une droite affine D, dès lors que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. On dit que $\{(\frac{c-bt}{a}, t),\ t \in \mathbb{R}\}$ est une représentation paramétrique de D quand $a \neq 0$ (Resp. $\{(t, \frac{c-at}{a}),\ t \in \mathbb{R}\}$ quand $b \neq 0$)

III - Système de deux équations à deux inconnues.

$$(E) = \begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

Méthode par substitution : la méthode consiste à d'abord resoudre l'eq. de la première ligne, autrement dit exprimer y en fonction de x si $b \neq 0$ ou x en fonction de y si $a \neq 0$. puis d'injecter dans la deuxième équation pour trouver la valeur manquante.

Entraînons nous sur des exemples.

1) $E = \begin{cases} x + 2y = 3 \\ -x + y = 0 \end{cases}$

la seconde équation donne $x = y$. En remplaçant dans la première équation, on trouve $3x = 3$ donc $x = 1$.

On déduit de cela que $(1,1)$ est la seule solution de E.

$\mathcal{L} = \{(1,1)\}$.

2) $\begin{cases} 2x + 2y = 0 & L_1 \\ x + y = 1 & L_2 \end{cases}$

L_2 donne $x = 1-y$. On injecte dans L_1. $\underbrace{2(1-y)+2y}_{2} = 0$ on trouve $2 = 0$. C'est impossible donc pas de solution $\mathcal{L}_E = \emptyset$.

3) $\begin{cases} 2x - 4y = 2 & L_1 \\ x - 2y = 1 & L_2 \end{cases}$

L_2 donne $x = 1+y$. On injecte dans L_1, on trouve

$2(1+y) - 4y = 2$ c'est à dire $2 = 2$. Pas de contrainte sur y supplémentaire donc

On peut choisir n'importe quelle valeur de x et alors $y = 1 + x$ convient : $\mathcal{S}_E = \{(t, 1+t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

<u>Remarque</u>. $L_1 = 2L_2$. c'est normal que on se retrouve dans la situation de une équation à deux variables : L_1 et L_2 sont <u>redondantes</u>.

. <u>Interprétation géométrique</u> : Résoudre un système à deux équations et deux inconnues, c'est la même chose que chercher les points qui se trouvent à l'intersection de deux droites. Comme deux droites sont soit parallèles et non confondues, soit confondues, soit se croisent en un unique point, on en déduit le théorème suivant :

<u>Théorème 1</u> le système $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ a soit pas de solution, soit une unique solution, soit une ∞-té de solutions

On a aussi le théorème suivant :

<u>Théorème 2</u> : le système $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ a une unique solution si, et seulement si, $ad - bc \neq 0$. Dans ce cas la solution est donnée par

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

où $\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma.$

Ces formules sont connues sous le nom de formules de Cramer