

A. Cours

A.1) Ensemble complet d'observable qui commutent
 Ensemble d'observables qui est bien adapté pour décrire un problème car on peut mesurer chaque degré de liberté de manière indépendante.

Structure Fine J	$(H_0, L^2, S^2, J^2, J_z, I^2, I_z)$
Hyperfine F	$(H_0, L^2, S^2, J^2, I^2, F^2, F_z)$

A.2) * J^+ et J^- commutent

* $\langle J^2 \rangle \geq 0 \Rightarrow j(j+1) \hbar^2$

* $J^+, J^- \rightarrow$ opérateur montant $m_j \rightarrow m_{j+1}$
 descendant $m_j \rightarrow m_{j-1}$

* $\|J^+ |j, m\rangle\| > 0 \Rightarrow m < j$

$\|J^- |j, m\rangle\| < 0 \Rightarrow m > -j$

* Démonstré par l'absurde $\Rightarrow j$ demi entier ou entier

$\Rightarrow m$

A.3) $\Delta E = \langle n | H_{int} | n \rangle$

$$\psi = \psi_n + \sum_{k \neq n} \frac{\langle k | H_{int} | n \rangle}{E_n - E_k} | k \rangle$$

A.4) $L = S$ $\{ |L-S|, |L+S| \}$
 $S = \frac{1}{2}$ $\frac{9}{2}$ $\frac{11}{2}$

a) possible depend de $m_L + m_S = m_J$

b) possible depend de $m_L + m_S = m_J$

c) pas possible.

A.5) $\Delta l = \pm 1, 0$

$\Delta m_L = \pm 1, 0$

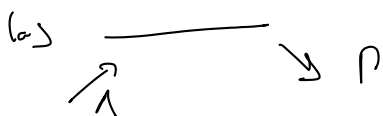
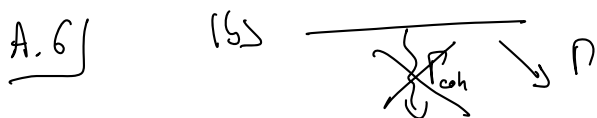
polarisation du photon $\rightarrow Y_{10}(\theta, \varphi)$
 ± 1

$$\langle n, l, m | -\hat{d} \cdot \vec{E} | n', l', m' \rangle \propto \iint Y_{n,l,m}^* \underbrace{Y_{10} Y_{n',l',m'}}_{\sum_{l'', m''} Y_{n',l'',m''}} d\Omega$$

avec $m'' = m' + \{ \pm 1, 0 \}$
 $l'' = \{ l-1, l, l+1 \}$

Par symétrie (parité / anti parité)

$\Delta l = 0$ interdit.



Conc $\chi' \rightarrow$ dispersion

$\chi'' \rightarrow$ atténuation

à fort s: non linéarité

B Spectre du Deutérium

B Exercice

B.1) On a vu en cours $\hat{a} = \frac{2}{3} p_0 \delta(\vec{r}) \leftarrow$ so symétrique de révolution

$$\Rightarrow a = \frac{2}{3} p_0 \langle \Psi_{n,l,m}(r, \theta, \varphi) | \delta(\vec{r}) | \Psi_{n,l,m}(r, \theta, \varphi) \rangle$$

$$= \frac{2}{3} p_0 |\Psi(0)|^2$$

B.2) $\vec{K} = \vec{J} + \vec{I}$

$$\Rightarrow K \in [|J-I|, \dots, J+I]$$

$$K(K+1)\hbar^2 = [(I-I)(I-I+1), \dots, (J+I)(J+I+1)]$$

B.3) $H = \hat{H}_I + \hat{H}_J + \hat{W}$

$$= E_I + E_J + a g_I g_J \frac{p_0 p_H}{\hbar} \underbrace{\vec{I} \cdot \vec{J}}_{\frac{1}{2} (\vec{K}^2 - \vec{I}^2 - \vec{J}^2)}$$

$$E_{I,J,K,m_K} = E_I + E_J + \frac{a g_I g_J p_0 p_H}{2 \hbar^2} \hbar^2 (K(K+1) - I(I+1) - J(J+1))$$

B.4) Deux niveaux successifs sachant I et J fixés

$$\Rightarrow K \text{ et } K' = K+1$$

$$\Delta E = \frac{a g_I g_J p_0 p_H}{2} ((K+1)(K+2) - K(K+1)) = (K+1) a g_I g_J p_0 p_H$$

B.5) Electron : $l=0 \quad s=\frac{1}{2} \Rightarrow J=\frac{1}{2}$

Deuteron ?

Sur la courbe on remarque

$$\left. \begin{array}{l} K^{\text{exp}} = \frac{1}{2} = |I-J| \\ K'^{\text{exp}} = \frac{3}{2} = I+J \end{array} \right\} I = 1$$

B.6) $l_p = 0$

$l_n = 0$

$I = 1 = s_p + s_n$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

→ Etat triplet pour le proton et le neutron

$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} I=0 = |s_n - s_p| \\ \text{état singulet} \end{array} \right.$

B.7) $K_{\text{fond}} = \frac{1}{2}$

$$\Delta E = h\nu = h \frac{c}{\lambda} = \frac{3}{2} a g_p g_n p_p p_n = \frac{3}{2} \frac{8\pi^2 \hbar^2}{12 \pi^2 a^3} \times 10^{-23} \times 5 \times 10^{-27} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{40}{125} 10^{-7+33-23-27} = 3 \times 10^{-2-27} = 3 \times 10^{-25}$$

et $\lambda = \frac{hc}{3 \times 10^{-25}} = \frac{3 \times 10^8}{3 \times 10^{-25}} \times 6 \times 10^{-34} = 6 \times 10^{-1} \approx 0.6 \text{ m.}$

1 m.

C. Problème : Atomes de Rydberg

C.1) $n = 60$

$l = 0 \Rightarrow 60s$

$l = 59 (n-1) \Rightarrow 60C$
 $\uparrow$ circulaire

$$E_{n,l,j} = E_n + \frac{E_n \alpha^2}{n^2} \left(\frac{n}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right)$$

C.2) $60s : n = 60 ; l = 0 ; s = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow E_{n,l,j} \approx E_n \left(1 + \frac{\alpha^2}{n} \right) \Rightarrow \Delta E_{60s} = E_n \frac{\alpha^2}{n} \approx E_n \times (9 \cdot 10^{-7})$$

$60C : n = 60 ; l = 59 \Rightarrow j \approx l$

$$E_{n,l,j} = E_n \left(1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \right) =$$

$$\Delta E_{60C} = E_n \times 1.5 \cdot 10^{-8}$$

$$E_n \gg \Delta E_{60s} \gg \Delta E_{60C}$$

Couplage fin de l'état $60s$ donne petit écart par rapport à l'écart des niveaux

$$\Delta E = E_{59c} - E_{60c}$$

$$= E_{59} \left(1 + \frac{\alpha^2}{59^2} \right) - E_{60} \left(1 - \frac{\alpha^2}{60^2} \right)$$

$$\approx E_{59} - E_{60}$$

$$= 13,6 \times \left(\frac{1}{59^2} - \frac{1}{60^2} \right) = 1,3 \cdot 10^{-4} \text{ eV}$$

$$= h\nu$$

$$\nu = 31,3 \text{ GHz}$$

C.3) L'interaction hyperfine est liée à l'overlap du proton et de l'électron. Dans un état de Rydberg l'électron est délocalisé loin du proton : l'overlap est donc faible.

C.4) L'état circulaire est le dernier état $l = l_{\max}$

On a donc $J_+ |60c\rangle = 0 \rightarrow$ équation de l'état circulaire

$$J_+ = -\hbar e^{i\phi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot(\theta) \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

$$\text{A t on } J_+(\psi) = 0 \text{ ?}$$

$$(n-1) \times \cos \theta (\sin^{n-2} \theta) \times e^{i(n-1)\phi} + i \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \sin^{n-1} \theta \times (n-1) \times i e^{i(n-1)\phi} = 0$$

$$\text{C.5) } \langle r \rangle = \int \psi^* r \psi dr d\theta r \sin \theta d\phi$$

$$= \frac{1}{\pi a_0^3 (n!)^2} \left(\frac{1}{n a_0} \right)^{2n-2} \underbrace{\int_0^\pi \sin \theta^{2n-1} d\theta}_{\frac{(n-1)!^2 2^{2n-1}}{(2n-1)!}} \times \underbrace{\int_0^\infty r^{2n+1} e^{-\frac{2r}{na_0}} dr}_{\frac{(2n+1)! (na_0)^{2n+2}}{2^{2n+2}}} \times \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi}$$

$$= n^2 a_0 \times \underbrace{\left(\frac{n+\frac{1}{2}}{n} \right)}_{1 + \frac{1}{2n}}$$

$$\langle n^2 \rangle = \frac{1}{a_0^2 (n!)^2 n^2} \left(\frac{1}{na_0} \right)^{2n-2} \times \frac{(n-1)!^2 2^{2n}}{(2n-1)!} \times \frac{(2n+2)! (na_0)^{2n+3}}{2^{2n+3} 2^4} \times 2$$

$$= a_0^2 n \times \frac{2(n+1)(2n+1) \times 2n}{2^4} \times 2$$

$$\approx a_0^2 n^4 \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(1 + \frac{1}{2n} \right)$$

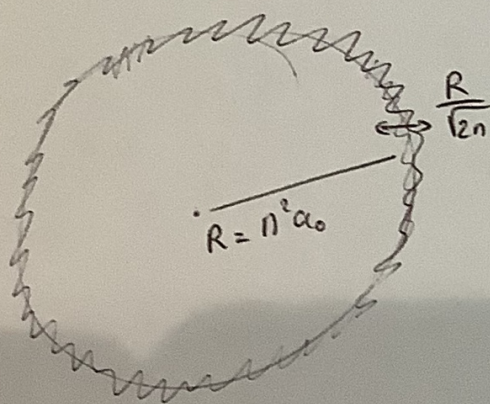
$$\approx a_0^2 n^4 \left(1 + \frac{3}{2n} \right)$$

$$\Delta n = \sqrt{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2}$$

$$= a_0^2 n^4 \left(1 + \frac{3}{2n} - \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^2 \right)$$

$$\approx \frac{1}{2n} a_0^2 n^4$$

$$\approx a_0 n^2 \times \frac{1}{\sqrt{2n}}$$



C.6) $\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle f, E_f = E_i | H_{\pm} | i \rangle \right|^2 \rho(E_f)$

↑
element de couplage

↑
densité de mode

C.7) $\Gamma_{i \rightarrow f} = \frac{2 \omega_{if}^3}{3 \epsilon_0 c^3 \hbar} |d_{if}|^2$

densité d'état est dans ce terme.

C.8) Les règles de sélection des transitions dipolaires sont $\Delta l = \pm 1$.

Pour $60S$, on a $l=0 \Rightarrow$ ne peut pas se coupler à
 $nS \quad \Delta l = 0$
 $nD \quad \Delta l = 2$.

Les seuls états possibles sont nD .

C.9) $P_{60S} = \sum P_{60S \rightarrow nD}$
 $\approx [(1.75 + 6.75 + 0.4 + 0.25 + 0.15 + 0.1) + 20 \times (0.005 + 0.002)] \times 10^3$
 $\approx 3.54 \times 10^3$

$\Rightarrow \tau_{60S} = \frac{1}{P} = 280 \text{ ps}.$

C.10) L'état $60C$ est extrême. Avec $\Delta l = \pm 1$, la seule possibilité est de décroître vers l'état $59C$. ($\Delta l = -1$)
 $\Rightarrow$ il n'y a qu'une seule transition qui participe à la désexcitation

C.11) $60C \rightarrow 59C \quad d = 2850$
 $\omega = 2\pi \times 30 \text{ GHz}$

$P_{60C \rightarrow 59C} = \frac{2 \omega_{if}}{3 \epsilon_0 c^3 \hbar} |\langle i | \mathbf{d} | f \rangle|^2$

$\tau = 59,7 \text{ ms}.$

C.12) $a = 7.8 \times 10^{15} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-2}$
 $P = 3.46 \times 10^{-22} \text{ W}$

$P \times \tau = \hbar \nu$
 $\uparrow$
 1 photon

$\Rightarrow \tau \approx 59 \text{ ms}.$

Le temps de vie correspond au temps nécessaire pour que l'énergie rayonnée corresponde à 1 photon

C.13]

60 S

T = 300 K.

n P

S

|

20

21

|

S8

S9 P

60 P

$\hat{n} \approx 0$ (pas d'influence)

$\hat{n} = 0$

$\hat{n} \leq 200$ et $P \approx 0.002$

$\hat{n} \leq 2$

$\hookrightarrow P = 0.4 \times 35 \times 10^{-3} = 15 \times 10^{-3}$

$\hat{n} \approx 500$

$\hat{n} \approx 500$

$\xrightarrow{P.5 \times 10^3} P = 2.5 \times 10^3$

$\times 2$
non négligeable

$\hat{n} \approx 5$

↓
diminution importante du
temps de vie

↓
diminution très réduite
du temps de vie

60 C.

$\hat{n} \approx 5$

S9 C

$\hat{n} \approx 500$

60 C

↓
réduct° du temps de vie
 ≈ 500

↓
réduction du temps de
vie de 5 env.

Conc Pour les états de Rydberg circulaire, il est
absolument crucial de travailler dans un environnement
cryogénique.