Examen de Physique Atomique

2024-2025

Durée 2h

Seul document autorisé : une feuille recto-verso

Calculatrice et téléphone interdits

Ordinateur interdit (sauf aménagement)

Les réponses peuvent être rédigées en français ou en anglais.

Remarque :

— Le barème est donné à titre indicatif pour vous aiguiller sur la difficulté des questions.

— Toute réponse devra être justifiée. Lorsque cela est explicitement demandé, toute réponse non-justifiée sera comptée fausse. Les parties A (Cours), B (Exercice) et C (Problème) sont indépendantes.

Formulaire :

Fonctions radiales et harmoniques sphériques de l'atome **d'hydrogène.**

$$R_0^1 = \frac{2}{\sqrt{a_0^3}} e^{-r/a_0} \qquad Y_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$R_0^2 = \frac{1}{\sqrt{2a_0^3}}\left(1 - \frac{r}{2a_0}\right) e^{-r/2a_0} \qquad Y_{1,\pm 1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin(\theta) e^{\pm i\phi}$$

$$R_1^2 = \frac{1}{\sqrt{3(2a_0)^3}} \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0} \qquad a_0 \approx 0.53 \times 10^{-10} \text{ m}$$

On rappel :

$$\hat{\mathbf{P}}^2 = (i\hbar\nabla)^2 = -\hbar^2 \left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right) \right) \tag{1}$$

$$\hat{\mathbf{L}}^2 = -\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right) \tag{2}$$

$$\hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi} \tag{3}$$

Identité algébrique : On donne les identités suivantes qui seront admises dans le cadre de cet examen :

$$\int_0^\pi \sin(\theta)^{2n-1} d\theta = \frac{(n-1)!^2 2^{2n-1}}{(2n-1)!} \tag{4}$$

$$\int_0^\infty r^n e^{-\alpha r} dr = \frac{n!}{\alpha^{n+1}} \tag{5}$$

A : Questions de cours (7 pts)

(A.1) (1 pt) Qu'est ce qu'un ECOC ? Donnez un ECOC pour l'hydrogène en structure Fine puis en structure Hyperfine.

(A.2) (1.5 pts) Donnez les éléments clefs de la démonstration de la quantification du moment cinétique (10 lignes max).

(A.3) (1 pt) Rappelez la formule du déplacement d'énergie et l'état à l'ordre 1 de la théorie des perturbation.

(A.4) (1.5 pt) On a $L = 5$ et $S = 1/2$. Quelles états de la base $|L, m_L, S, m_S\rangle$ participent à la décomposition de

(a) $|L, S, J = 9/2, m_J = -5/2\rangle$

(b) $|L, S, J = 11/2, m_J = 7/2\rangle$

(c) $|L, S, J = 13/2, m_J = 11/2\rangle$

(A.5) (1 pt) Rappelez les règles de sélection qui s'appliquent à une interaction dipolaire électrique en l'absence de structures fine et hyperfine. Donnez les étapes de la démonstration, sans refaire la démonstration complète (15 lignes max).

(A.6) (1 pt) Nous avons calculé dans le cours la susceptibilité d'un système à deux niveaux en présence de dissipation. Quelle forme de dissipation avons nous pris en compte ? Une réponse sous forme d'un schéma pourra tout à fait convenir. Quels sont les principales conclusions de ce calcul ?

B : Exercice : Spectre du deutérium (7.5 pts)

Le deuterium est un isotope stable de l'hydrogène. Son noyau atomique appelé le deuteron possède un neutron et un proton. Comme l'hydrogène, le deuterium ne possède qu'un seul électron. On note $\hat{\mathbf{J}}$ l'observable moment cinétique total du nuage électronique d'un atome et $\hat{\mathbf{I}}$ le moment cinétique du noyau. Les observables de moment magnétique sont $\hat{\mu}_J = g_J.\mu_B.\hat{\mathbf{J}}/\hbar$ et $\hat{\mu}_I = g_I.\mu_N.\hat{\mathbf{I}}/\hbar$; μ_B et μ_N représentent le magnéton de Bohr et le magnéton nucléaire, et g_J et g_I sont les facteurs de Landau sans dimension.

L'hamiltonien d'interaction magnétique entre le nuage électronique et le noyau est de la forme $\hat{W} = a\ \hat{\mu}_J.\hat{\mu}_I$, où a est une constante qui dépend de la distribution électronique.

(B.1) (1 pt) Donnez l'expression formelle de a. On ne cherchera pas à calculer a.

(B.2) (1 pt) On suppose que l'état du noyau (énergie E_I, carré du moment cinétique $I(I+1)\hbar^2$) et l'état du nuage électronique (énergie E_J, carré du moment cinétique $J(J+1)\hbar^2$) sont tous deux fixés. Quelles sont les valeurs possibles $K(K+1)\hbar^2$ du le carré du moment cinétique total $\hat{\mathbf{K}}$ de l'atome ?

(B.3) (1 pt) Exprimer les niveaux d'énergie hyperfins du deutérium en fonction de I, J, K.

(B.4) (1 pt) Calculer le clivage entre deux niveaux hyperfins consécutifs en fonction de ces mêmes grandeurs.

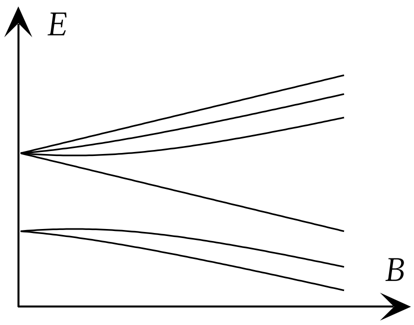

FIGURE 1 – Clivage Zeeman

(B.5) (1.5 pt) Quand on applique un faible champ magnétique uniforme B sur un atome de deutérium, on observe que les deux sous-niveaux hyperfins (E_K et $E_{K'}$) de l'état fondamental sont clivés en fonction du champ B comme représenté sur la figure 1. Sachant que l'unique électron de l'atome est dans l'état orbital $l = 0$, quelle est la valeur du moment cinétique du deutéron ?

(B.6) (0.5 pt) En supposant que le proton et le neutron ont un moment cinétique orbital nul à l'intérieur du deutéron, quel est leur état de spin ?

(B.7) (1.5 pt) On a $a = -8\mu_0/12\pi a_1^3$ où a_1 est le rayon de Bohr, et $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ H/m est la perméabilité magnétique du vide. Sachant que $\mu_B = 9.3 \times 10^{-24}$ J.T^{-1}, $\mu_N = 5 \times 10^{-27}$ J.T^{-1}, $g_e = 2$ et $g_I = 0.86$, donner l'ordre de grandeur de la longueur d'onde à laquelle on doit accorder un radiotélescope pour détecter le deutérium dans l'espace interstellaire ?

C : Problème : Atomes de Rydberg (24 pts)

Dans ce problème, on vous demande une estimation numérique de certains paramètres sans calculatrice. Une réponse dans le bon ordre de grandeur sera comptée exacte.

On appel atome de Rydberg, un atome ayant été porté dans un état de nombre quantique principale n élevé. Il est donc proche de la limite d'ionisation. On distingue les atomes de Rydberg ayant un moment cinétique l faible et ceux ayant un moment cinétique l élevé. La constante de structure fine est $\alpha \approx 1/137$.

(C.1) (1 pt) Pour n=60, donnez les deux cas extrêmes : l le plus faible et l le plus élevé. On nomme ce dernier cas un atome de Rydberg circulaire.

Vous admettrez que les corrections relativistes de l'interaction spin-orbit mènent à une expression de l'énergie des états propres de la structure fine donnée par :

$$E_{nlj} = E_n \left(1 + \frac{\alpha^2}{n^2}\left(\frac{n}{j+1/2} - 3/4\right)\right) \qquad \text{et} \qquad E_n = \frac{-13,6eV}{n^2} \tag{6}$$

(C.2) (2 pts) Déterminez le déplacement en énergie de l'état 60S (n=60, l=0) et de l'état 60C (n=60,l=59). Vous comparerez les résultats entre eux et à l'énergie E_n. Calculez également l'écart de fréquence entre l'état 60C (n=60,l=59) et l'état 59C (n=59,l=58).

(C.3) (1 pt) Justifiez par un argument qualitatif que l'interaction hyperfine puisse être négligée pour tous les états de Rydberg.

(C.4) (2 pts) En utilisant l'observable de moment cinétique montante $\hat{J}_+ = -\hbar e^{i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot(\theta)\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$, Montrez que la fonction d'onde ci-dessous est bien solution de l'équation angulaire d'un état circulaire (l=n-1) que vous rappellerez. On admettra que la forme radiale est bien celle de l'équation 7 :

$$\Psi(r,\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}}\frac{1}{nn!}\left(-\frac{r}{na_0}\sin(\theta)e^{i\phi}\right)^{n-1} e^{-r/na_0} \tag{7}$$

(C.5) (4 pts) Calculez la position radiale moyenne $\langle r \rangle$ de l'électron ainsi que sa dispersion Δr dans un état circulaire de nombre quantique principale n. Justifiez à l'aide de vos résultats l'appellation d'état " circulaire ". On pourra utiliser les identités algébriques précisées en début d'énoncé.

On s'intéresse maintenant au temps de vie des niveaux de Rydberg. Et on rappel qu'il est donné par la règle d'or de Fermi.

(C.6) (1 pt) Rappelez la règle d'or de Fermi qui permet de déterminer le temps de vie radiatif d'un état.

On peut montrer que cette expression peut se mettre sous la forme suivante :

$$\Gamma_{i->f} = \frac{2\omega_{if}^3}{3\epsilon_0 c^3 h}|d_{if}|^2 \tag{8}$$

(C.7) (1 pt) Dans cette expression, où intervient la densité d'état ?

Pour le cas du Rubidium, en calculant les intégrales de recouvrement des fonctions d'onde avec l'opérateur dipolaire électrique, on obtient les valeurs de Γ_{if} du tableau ci-après pour l'état initiale 60S.

nP	$\omega_{60S,nP}/2\pi$ (GHz)	$\Gamma_{60S->nP}$ (s^{-1})
5P	130 000	1.75 $\times 10^3$
6P	90000	0.75 $\times 10^3$
7P	66000	0.4 $\times 10^3$
8P	50000	0.25 $\times 10^3$
9P	40000	0.15 $\times 10^3$
10P	32000	0.1 $\times 10^3$
30P	2700	0.005 $\times 10^3$
50P	400	0.002 $\times 10^3$
59P	18	0.005 $\times 10^3$
60P	18	0.005 $\times 10^3$

(C.8) (1.5 pts) Pourquoi, dans le tableau on ne considère que des états nP et pas nS (n,l=0) ou nD (n,l=2) ?

(C.9) (1.5 pts) Quel est approximativement le temps de vie de l'état 60S ?

(C.10) (1 pt) Pourquoi l'état circulaire 60C est il mieux protégé de l'émission spontanée que l'état 60S ?

(C.11) (2 pts) L'élément dipolaire entre 60C et 59C vaut d=2850 $e.a_0$. Quel est le temps de vie par émission spontanée de l'état 60C ?

(C.12) (2 pts) Dans l'état 60C, l'électron se situe très loin du coeur et il est soumis à une accélération de $a = \frac{1}{m_e} * \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0(n^2 a_0)^2}$. En électromagnétisme, la puissance rayonnée par un électron soumis à une accélération centripète a est $P = \frac{2}{3}\frac{e^2 a^2}{4\pi\epsilon_0 c^3}$. Pouvez vous retrouver par un argument semi-classique le résultat de la question précédente.

En présence d'un bain de photons du corps noir, les processus de transfert de l'état initial vers des états finaux sont augmentés par émission stimulée de la valeur du nombre de photons aux fréquences de transition. Les ordre de grandeur du nombre de photons par modes $\bar{n}(\omega) = \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$ à différentes fréquences (ω), pour une température T=300 K ou T=4K sont données dans le tableau ci-dessous :

$\omega/2\pi$ (GHz)	$\bar{n}(\omega)$ @ $T = 300K$	$\bar{n}(\omega)$ @ $T = 4K$
1	6300	83
10	630	8
30	210	2
100	60	0.4
1000	6	10^{-6}
10 000	0.3	≈ 0

(C.13) (4 pts) Etant donné le temps de vie de l'état $|i\rangle$ en fonction du nombre de photon par modes,

$$\Gamma_i = 1/\tau_i = \sum_{f<i} \Gamma_{if}(1 + \bar{n}(\omega)) + \sum_{f>i} \Gamma_{if}(\bar{n}(\omega)), \tag{9}$$

Evaluez qualitativement l'influence du rayonnement du corps noir sur le temps de vie d'un atome dans l'état 60S et dans l'état 60C. Quelle conclusion en tirez vous ?