

EXAMEN DECEMBRE 2024

COMPORTEMENT MECANIQUE ET ENDOMMAGEMENT DES MATERIAUX

Fiche recto-verso - calculatrice autorisée
Traiter les **3 parties** sur **3 copies séparées**

PARTIE A

I ELASTICITE ANISOTROPE

La loi d'élasticité écrite dans un repère orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ s'écrit : $\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl}$ avec $i, j, k, l = 1, 2, 3$.

1. Appliquer la formule pour donner l'expression de ε_{23} .
2. La notation de Voigt permet d'écrire la loi de comportement élastique, sous une forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ & \cdot & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ S_{61} & & & & & S_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \gamma_4 = 2\varepsilon_{23} \quad \gamma_5 = 2\varepsilon_{31} \quad \gamma_6 = 2\varepsilon_{21}$$

Exprimer γ_4 et montrer qu'avec cette notation on a nécessairement : $S_{IJ} = 4S_{ijkl}$ pour $I > 3$ et $J > 3$ et $S_{IJ} = 2S_{ijkl}$ pour $I = 4, 5, 6$ et $J = 1, 2, 3$.

3. On écrit le comportement d'un matériau isotrope transverse dans le repère $(\vec{e}_\ell, \vec{e}_t, \vec{e}_{t'})$:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_\ell \\ \varepsilon_t \\ \varepsilon_{t'} \\ \gamma_{tt} \\ \gamma_{t\ell} \\ \gamma_{t\ell'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/E_\ell & -\nu_{t\ell}/E_\ell & -\nu_{t\ell'}/E_\ell & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{\ell t}/E_\ell & 1/E_t & -\nu_{\ell t'}/E_t & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{t'\ell}/E_\ell & -\nu_{t't}/E_t & 1/E_{t'} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{t\ell} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{t\ell'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_\ell \\ \sigma_t \\ \sigma_{t'} \\ \sigma_{tt} \\ \sigma_{t\ell} \\ \sigma_{t\ell'} \end{pmatrix}$$

- a. Quelle est la relation entre $\nu_{t\ell}/E_t$ et $\nu_{\ell t}/E_\ell$?
- b. Dans quelles directions doit-on réaliser des essais de traction simple (une seule contrainte non nulle) pour obtenir E_ℓ et E_t . Quelles sont les déformations à mesurer pour obtenir ces 2 modules (Justifier en utilisant l'expression matricielle).
- c. Comment obtenir, à partir des essais précédents (ou d'autres essais) le coefficient $\nu_{t\ell}$? Comment obtenir $\nu_{\ell t}$ sans refaire d'essai ou de mesure ?

II RHEOLOGIE

On considère un polymère de comportement viscoélastique linéaire. On suppose, pour simplifier, que son comportement uniaxial est régi par l'équation suivante (*tout le problème sera traité en uniaxial*) :

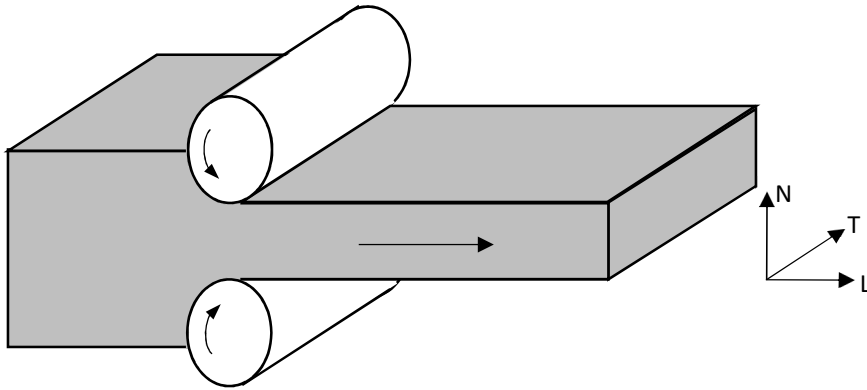
$$\frac{\dot{\sigma}_m}{E_m} + \frac{\sigma_m}{\eta_m} = \dot{\varepsilon}_m$$

Avec $E_m = 5 \text{ GPa}$, $\eta_m = 1200 \text{ GPa.h}$, σ_m la contrainte dans le polymère et ε_m , la déformation totale.

1. S'agit-il du modèle de Maxwell ou de Kelvin Voigt ? Justifier.
2. Calculer le temps nécessaire pour obtenir 2% de déformation en fluage sur le polymère, lorsque la contrainte est $\sigma_0 = 25 \text{ MPa}$.

Partie B : Plasticité macroscopique

On se propose de caractériser le comportement élasto-plastique d'une tôle en acier laminée à froid. Les directions particulières vis-à-vis du procédé de fabrication sont la direction de laminage L, la direction transverse T, et la direction normale N.



- 1) Du fait du procédé de fabrication, la réponse mécanique à une sollicitation de traction est-elle a priori identique selon que cette sollicitation s'effectue dans l'une ou l'autre des 3 directions L, T et N de la tôle?
- 2) Si la limite d'élasticité en traction dépend de la direction dans laquelle l'essai est mené, un critère de plasticité de type von Mises ou Tresca peut-il être utilisé pour reproduire ces résultats expérimentaux ? Justifier et donner le cas échéant le nom d'un autre critère de plasticité utilisé pour ce type de cas.

Afin de vérifier le niveau d'anisotropie du matériau dans le plan de la tôle, deux essais de traction sont menés, le premier selon la direction L et le second selon la direction T. La différence de comportement étant jugée suffisamment faible entre les deux essais, on considère dans la suite que le matériau possède finalement un comportement isotrope pouvant être décrit par :

- le critère de plasticité de von Mises : $f = \sigma_{eq}^{vM} - R - \sigma_0 \leq 0$
- une loi d'écrouissage isotrope linéaire : $dR = H \cdot dp$

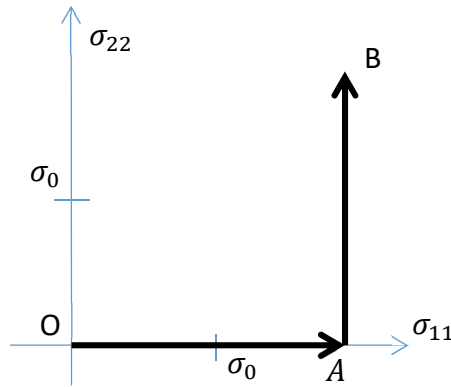
avec σ_{eq}^{vM} la contrainte équivalente de von Mises, R la variable d'écrouissage isotrope, σ_0 la limite d'élasticité initiale du matériau en traction, H le module d'écrouissage du matériau et dp le taux de déformation plastique cumulée.

On souhaite désormais évaluer l'effet d'un premier chargement élastoplastique dans une direction sur la réponse mécanique du matériau dans une seconde direction.

On prélève une éprouvette en forme de croix qui permet de solliciter la tôle dans les deux directions L et T indépendamment. L'état de contrainte au centre de la croix est alors décrit par le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}} =$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dans le repère (L, T, N).}$$

On considère alors le trajet de chargement représenté ci-dessous dans l'espace des contraintes σ_{11} et σ_{22} pour atteindre le point B.



Avec des niveaux de contrainte σ_{11} et σ_{22} au point B qui dépassent la limite d'élasticité initiale σ_0 du matériau.

- Montée en traction dans la première direction, depuis $(\sigma_{11}; \sigma_{22}) = (0; 0)$ jusqu'à $(\sigma_{11}; \sigma_{22}) = (\sigma_{11}(A); 0)$
 - 3) Exprimer le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ (en fonction de σ_{11}) et le tenseur taux de contrainte $\underline{\underline{d\sigma}}$ (en fonction de $d\sigma_{11}$).
 - 4) Exprimer (en fonction de σ_{11}) la contrainte équivalente de von Mises σ_{eq}^{vM} et la normale au domaine d'élasticité $\underline{\underline{n}} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}$
 - 5) Dédire de la condition de cohérence $\dot{f} = 0$ l'expression du taux de déformation plastique cumulé dp en fonction de $d\sigma_{11}$ et H .
 - 6) Donner l'expression du tenseur taux de déformations plastiques $\underline{\underline{d\varepsilon^p}}$ en fonction de $d\sigma_{11}$ et H
 - 7) Cette première partie du trajet de chargement étant proportionnelle (sans changement de direction), donner l'expression du tenseur des déformations plastiques $\underline{\underline{\varepsilon^p}}$ une fois atteinte la contrainte de traction $\sigma_{11}(A)$, en fonction de $\sigma_{11}(A)$, σ_0 et H .
 - 8) Exprimer alors l'écrouissage isotrope $R(A)$ à la fin du premier trajet de chargement en fonction de $\sigma_{11}(A)$ et σ_0 .
- Montée en traction dans la seconde direction depuis $(\sigma_{11}; \sigma_{22}) = (\sigma_{11}(A); 0)$ jusqu'à $(\sigma_{11}; \sigma_{22}) = (\sigma_{11}(A); \sigma_{22}(B))$
 - 9) Exprimer le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ (en fonction de $\sigma_{11}(A)$ et σ_{22}) et le tenseur taux de contrainte $\underline{\underline{d\sigma}}$ (en fonction de $d\sigma_{22}$).
 - 10) Exprimer σ_{eq}^{vM} en fonction de $\sigma_{11}(A)$ et σ_{22} . Pour quelle valeur de σ_{22} le matériau plastifie-t-il à nouveau au cours de ce second trajet de chargement, en considérant que l'écrouissage mis en œuvre dans le premier trajet de chargement est isotrope?
 - 11) Y-a-t'il un intérêt a priori à effectuer ce type de trajet de chargement non proportionnel de bi-traction si l'on s'arrête à $\sigma_{22}(B) \leq \sigma_{11}(A)$. Discuter par exemple par rapport au cas vu en cours d'un trajet biaxial non-proportionnel similaire de type traction – torsion au lieu de traction-traction comme ici.
 - 12) En considérant que l'on continue d'augmenter la contrainte σ_{22} jusqu'à plastifier à nouveau le matériau, donner alors l'expression de la normale au domaine d'élasticité $\underline{\underline{n}} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}$. Est-elle différente de celle obtenue à la fin du premier trajet ?
 - 13) Dédire de $\dot{f} = 0$ l'expression de dp en fonction de $\sigma_{11}(A)$, σ_{22} , $d\sigma_{22}$ et H .
 - 14) Donner l'expression du tenseur taux de déformations plastiques $\underline{\underline{d\varepsilon^p}}$ en fonction de $\sigma_{11}(A)$, σ_{22} , $d\sigma_{22}$ et H .

15) Dans l'espace des contraintes σ_{22} fonction de σ_{11} , représenter sur un même graphique (schématiquement) le domaine d'élasticité ainsi que la direction de la vitesse de déformation plastique au point de chargement (si le point de chargement est sur le domaine d'élasticité) pour les deux états suivants :

- En A, où $(\sigma_{11}; \sigma_{22}) = (\sigma_{11}(A); 0)$
- En B, où $(\sigma_{11}; \sigma_{22}) = (\sigma_{11}(A); \sigma_{22}(B))$

On prendra pour cette question $\sigma_{11}(A) = 1,5\sigma_0$ et $\sigma_{22}(B) = 2\sigma_0$.

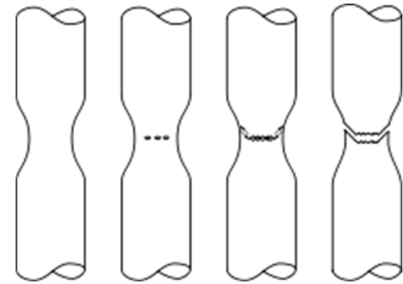
16) Représenter schématiquement l'évolution de la déformation plastique pendant tout le trajet dans un graphe ε_{22}^p en fonction de ε_{11}^p .

PARTIE C : MECANISMES D'ENDOMMAGEMENT ET DE RUPTURE

(1h00)

Exercice 1 : Questions diverses

1/Expliquer les différentes phases de la rupture illustrée ci-contre



2/ Les éprouvettes suivantes ont été rompues par traction. Quelles différences majeures observez-vous (faciès, plan de rupture) ? Les ruptures sont-elles fragiles ou ductiles (expliquer) ? De quels matériaux peut-il s'agir (en proposer 2 par éprouvette) ?

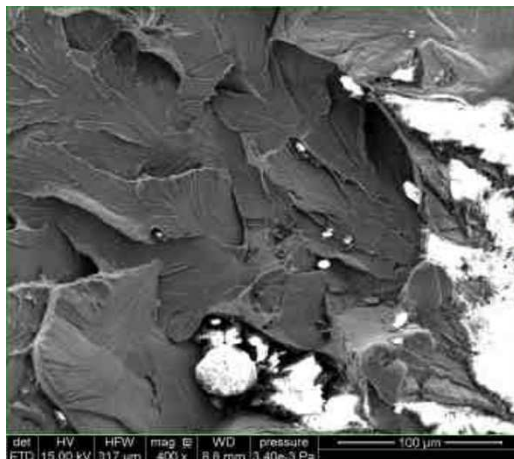


(a)

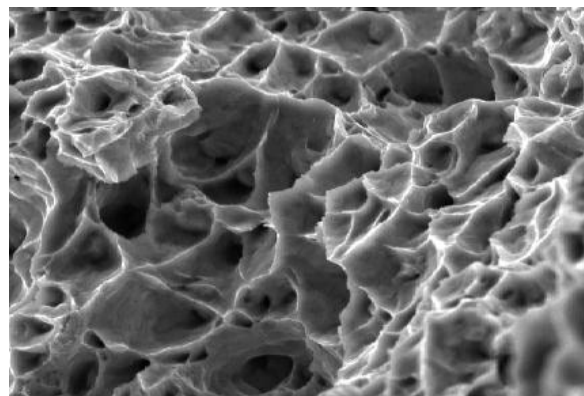


(b)

3/ Décrivez et commentez ces deux photos de faciès de rupture.



(a)



(b)

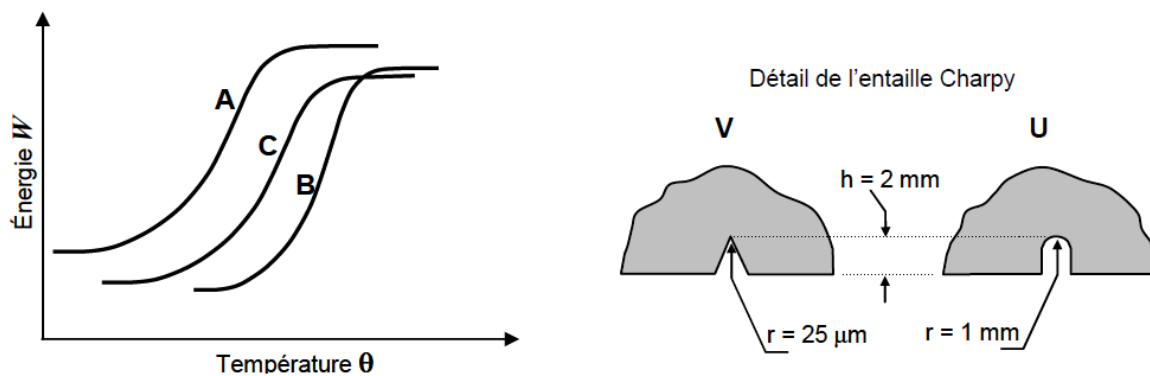
Exercice n°2 – Transition Ductile-Fragile

Les trois courbes de résilience A, B et C d'un acier (données ci-dessous) ont été obtenues au cours de trois séries d'essais Charpy, chacune des séries étant caractérisée par les conditions expérimentales suivantes :

1. Série 1 : Éprouvette Charpy avec entaille classique en **V**, hauteur initiale de chute du pendule **H0**
2. Série 2 : Éprouvette Charpy avec entaille modifiée en **U**, hauteur initiale de chute du pendule **H0**
3. Série 3 : Éprouvette Charpy avec entaille classique en **V**, hauteur initiale de chute du pendule **H1 > H0**

Voici le détail des entailles en **V** ou en **U** des éprouvettes Charpy.

Courbes de résilience Charpy d'un acier et détail des éprouvettes Charpy



À chacune des courbes de résilience, associez l'une des séries 1, 2 ou 3 d'essais. *Justifiez vos réponses.*

Exercice 3

Une large et fine plaque en alliage d'Aluminium a une fissure centrée de longueur $2a=25 \text{ mm}$. Si la contrainte de rupture de cet échantillon est $\sigma_{\max} = 200 \text{ MPa}$ et la limite élastique $\sigma_E = 400 \text{ MPa}$

On rappelle qu'en contrainte plane $r_{ZP}^{CP} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_E} \right)^2$ et qu'en déformation plane $r_{ZP}^{DP} = \frac{(1-2\nu)^2}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_E} \right)^2$.

- Calculer la ténacité du matériau en utilisant le concept de la mécanique élastique linéaire de la rupture (MELR)
- Calculer le rayon de la zone plastique en fond de fissure : r_{zp}
- Calculer la ténacité du matériau en introduisant la correction de la zone plastique d'Irwin en fond de fissure ($a'=a+r_{zp}$). Commenter.