Langages, interprétation, compilation – Partiel

Durée 2 heures. Tous documents autorisés.

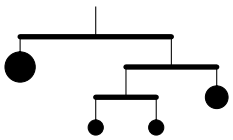
1. Récurrence

Un *mobile* est formé par un ensemble d'objets, suspendus à des barres elles-mêmes suspendues en équilibre à d'autres barres, et ainsi de suite jusqu'à un unique point de suspension auquel pend l'ensemble de la structure. Les mobiles ont une structure récursive. On peut les décrire à l'aide de la signature comportant les éléments suivants :

— pour tout nombre x, un symbole O_x d'arité 0 désignant un objet de masse x,

— pour tout nombre x, un symbole B_x d'arité 2 tel que $\mathsf{B}_x(m_1, m_2)$ désigne la combinaison de deux mobiles m_1 et m_2 à l'aide d'une barre de masse x.

Ainsi, le mobile dessiné ci-dessous à gauche peut être représenté par le terme à droite, où les masses reflètent approximativement les tailles des éléments dessinés.



$\mathsf{B}_3(\mathsf{O}_8, \mathsf{B}_2(\mathsf{B}_1(\mathsf{O}_1, \mathsf{O}_1), \mathsf{O}_3))$

La masse d'un mobile est la somme des masses de tous ses éléments. On dit qu'un mobile est *équilibré* si pour chacune de ses barres, la masse du sous-mobile de gauche est égale à la masse du sous-mobile de droite. Le mobile donné en exemple ci-dessus est équilibré.

Questions

1. Dessiner le mobile représenté par le terme $\mathsf{B}_{x_1}(\mathsf{B}_4(\mathsf{B}_{x_2}(\mathsf{O}_1, \mathsf{O}_{x_3}), \mathsf{O}_4), \mathsf{B}_{x_4}(\mathsf{O}_5, \mathsf{B}_1(\mathsf{O}_{x_5}, \mathsf{O}_{x_6})))$, et préciser des valeurs des x_i telles que ce mobile soit équilibré.
2. On note $b(m)$ le nombre de barres d'un mobile m, et $o(m)$ le nombre d'objets suspendus à un mobile m. Démontrer par récurrence que pour tout mobile m on a $o(m) = b(m) + 1$.
3. Donner des équations récursives définissant $\mathsf{masse}(m)$, la masse totale du mobile m.
4. Les équations suivantes définissent une fonction des mobiles vers les mobiles.

$$\begin{aligned} \mathsf{alourdir}(\mathsf{O}_x, y) &= \mathsf{O}_{x+y} \\ \mathsf{alourdir}(\mathsf{B}_x(m_1, m_2), y) &= \mathsf{B}_{x+y/3}(\mathsf{alourdir}(m_1, y/3), \mathsf{alourdir}(m_2, y/3)) \end{aligned}$$

   Montrer que $\mathsf{masse}(\mathsf{alourdir}(m, x)) = \mathsf{masse}(m) + x$.
5. Proposer un type caml `mobile` pour représenter les mobiles. Donner une définition caml de la fonction `masse`. Définir également une fonction caml `stable` telle que `stable(`m`)` renvoie `true` si le mobile m est équilibré et `false` sinon.

Correction

1. $x_3 = 1$, $x_2 = 2$, $x_5 = x_6 = 2$, $x_4 = 1$, x_1 quelconque.
2. Preuve par récurrence (induction) structurelle sur la structure des mobiles.
   — Cas d'un objet. On cherche à démontrer $o(\mathsf{O}) = b(\mathsf{O}) + 1$. Par définition $o(\mathsf{O}) = 1$ et $b(\mathsf{O}) = 0$: ok.
   — Cas d'une barre soutenant deux mobiles. On a m_1 et m_2 tels que $o(m_1) = b(m_1) + 1$ et $o(m_2) = b(m_2) + 1$ (hypothèses d'induction), et on cherche à démontrer l'égalité pour $\mathsf{B}(m_1, m_2)$. Calcul :

$$o(\mathsf{B}(m_1, m_2)) = o(m_1)+o(m_2) = (1+b(m_1))+(1+b(m_2)) = (1+b(m_1)+b(m_2))+1 = b(\mathsf{B}(m_1, m_2))+1$$

Par principe d'induction, pour tout mobile m on a $o(m) = b(m) + 1$.

3. Une équation par constructeur.

$$\begin{aligned} \mathsf{masse}(\mathsf{O}_k) &= k \\ \mathsf{masse}(\mathsf{B}_k(m_1, m_2)) &= k + \mathsf{masse}(m_1) + \mathsf{masse}(m_2) \end{aligned}$$

4. Preuve par induction structurelle.
5.

```
type mobile =
  | Obj of double
  | Bar of double * mobile * mobile

let rec masse = function
  | Obj d           -> d
  | Bar(d, m1, m2) -> d +. masse m1 +. masse m2

exception Instable
let stable m =
  let rec stable = function
    (* fonction auxiliaire récursive,
       renvoie la masse si stable
       et lève une exception si instable *)
    | Obj d -> d
    | Bar(d, m1, m2) ->
       let mas1 = stable m1 in
       let mas2 = stable m2 in
       if mas1 = mas2 then
         d +. mas1 +. mas2
       else
         raise Instable
  in
  try
    let _ = stable m in true
  with
    Instable -> false
```

2. Automates

On considère l'alphabet $A = \{a, b, r\}$ et le langage L des mots sur A contenant au moins une occurrence de la séquence « *babar* ».

Questions

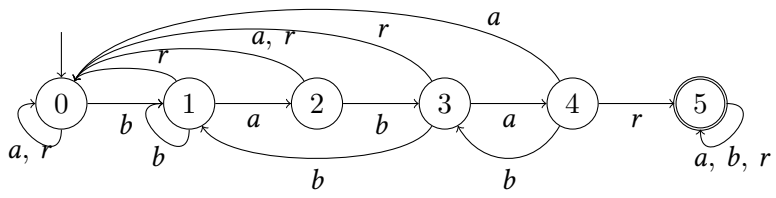
— Donner une expression régulière pour L.

— Donner un automate déterministe et complet reconnaissant L.

Correction

— $(a|b|r)^* babar (a|b|r)^*$

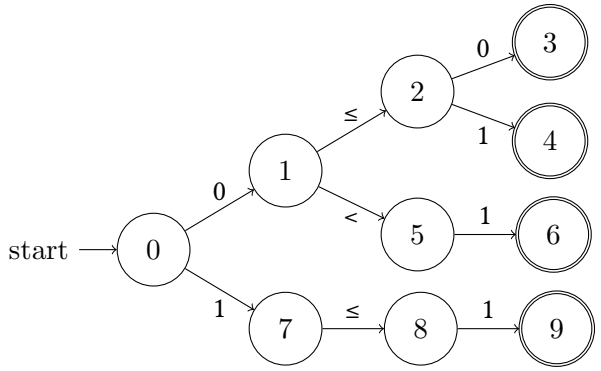
—



3. Langages reconnaissables

On considère l'alphabet $A = \{0, 1, <, \leq\}$. Les mots sur A permettent notamment d'écrire des chaînes de comparaisons de nombres binaires, comme $101 \leq 1000 < 1001 \leq 1001$.

L'automate ci-dessous reconnaît le langage L_1 des mots sur A formant une comparaison valide de deux nombres à 1 chiffre.



Questions

1. Donner une expression régulière reconnaissant L_1.
2. Dans l'automate ci-dessus, fusionner les états qui peuvent l'être pour obtenir un automate déteministe reconnaissant L_1 avec aussi peu d'états que possible (on ne veut pas forcément un automate complet).
3. Soit L_2 le langage des chaînes de comparaisons valides de nombres à 1 chiffre. L_2 contient donc par exemple $0 \leq 0 < 1 \leq 1$ ou $0 \leq 1 \leq 1$. Le langage L_2 est-il reconnaissable ? Donner une démonstration adéquate.
4. Soit L_3 le langage des comparaisons valides de deux nombres de tailles quelconques. L_3 contient donc par exemple $101 < 1001$ mais pas $110 \leq 101$. Le langage L_3 est-il reconnaissable ? Donner une démonstration adéquate.

Correction

1. $(0 \leq (0|1))|((0 < |1 \leq)1)$
2. États fusionnés : $\{0\}$, $\{1\}$, $\{7\}$, $\{2\}$, $\{5, 8\}$, $\{3, 4, 6, 9\}$.
3. Le langage est reconnaissable. On peut compléter l'automate précédent avec une arête retour de 3 vers 1 et de 4, 6, 9 vers 7.
4. Le langage n'est pas reconnaissable.

   Supposons que L_3 soit reconnaissable. Soit N la constante donnée par le lemme de l'étoile. On regarde le mot $1(0^N) \leq 1(0^N)$. Lemme de l'étoile forte, appliqué sur la première séquence 0^N en 0^{N_1}, 0^{N_2} et 0^{N_3} tels que $1(0^{N_1}(0^{N_2})^*0^{N_3}) \leq 1(0^N) \subseteq L_3$. On aurait en particulier $10^{N_1+2N_2+N_3} \leq 10^{N_1+N_2+N_3} \in L_3$, ce qui n'est pas vrai.

4. Grammaires

Voici 5 propositions différentes d'une grammaire pour décrire des séquences d'instructions séparées par des points-virgules. Dans tous les cas, on considère un symbole terminal ; (point-virgule), et deux symboles non terminaux *instr* et *seq*, respectivement pour les instructions et

pour les séquences. Le symbole ε désigne une séquence vide.

$$
\begin{array}{lllll}
G_a & seq & \longrightarrow & seq\,;\, seq \\
 & & | & instr \\
\\
G_b & seq & \longrightarrow & seq\ seq \\
 & & | & instr\,; \\
\\
G_c & seq & \longrightarrow & instr\,;\, seq \\
 & & | & \varepsilon \\
\\
G_d & seq & \longrightarrow & seq\,;\, instr \\
 & & | & \varepsilon \\
\\
G_e & seq & \longrightarrow & instr\,;\, seq \\
 & & | & instr\,;
\end{array}
$$

Questions

1. Parmi les grammaires proposées, lesquelles permettent de dériver la séquence suivante ?

   $$instr\,;\ instr\,;\ instr\,;\ instr\,;$$

   Donner un arbre de dérivation pour chacune.
2. Parmi les grammaires proposées, lesquelles sont ambigues ?
3. Identifier parmi les propositions au moins deux grammaires décrivant exactement le même langage.
4. Pour chaque grammaire qui n'a pas été citée à la question précédente, donner un exemple d'une séquence qui est dérivable avec cette grammaire mais n'est dérivable avec aucune des autres propositions.

Correction

1. Pas G_a, car manquerait ; à la fin. G_b ok, avec toutes associativités possibles. G_c ok, arbre en peigne vers la droite. Pas G_d, car on aurait ; au début plutôt qu'à la fin. G_e ok, avec arbre en peigne vers la droite.
2. G_a et G_b sont ambigues (associativité).
3. G_b et G_e décrivent le même langage (séquence de « instr ; » avec au minimum une occurrence).
4. G_a dérive $instr; instr$, G_d dérive $; instr$, G_c et G_d dérivent ε.

5. Interprétation

On se donne une syntaxe abstraite minimale pour des expressions arithmétiques avec variables locales, ainsi qu'une fonction d'évaluation écrite en caml.

```
type expr =
  | Cst of int
  | Add of expr * expr
  | Var of string
  | Let of string * expr * expr

let eval e =
  let env = Hashtbl.create 32 in
  let rec eval = function
    | Cst n -> n
```

```
    | Add(e1, e2) ->
       let v1 = eval e1 in
       let v2 = eval e2 in
       v1 + v2
    | Var x ->
       let e = Hashtbl.find env x in
       let v = eval e in
       Hashtbl.replace env x (Cst v);
       v
    | Let(x, e1, e2) ->
       Hashtbl.add env x e1;
       let v = eval e2 in
       Hashtbl.remove env x;
       v
in
eval e
```

Rappel des effets des fonctions sur les tables de hachage (`Hashtbl`) utilisées :

- `Hashtbl.create` n crée une nouvelle table de taille n (la taille étant susceptible d'être ajustée automatiquement plus tard).
- `Hashtbl.add` t x v ajoute une nouvelle association entre la clé x et la valeur v dans la table t, sans détruire les éventuelles autres associations déjà présentes pour x.
- `Hashtbl.find` t x renvoie la dernière valeur associée à x dans la table t.
- `Hashtbl.remove` t x retire de la table t la dernière association pour x.
- `Hashtbl.replace` t x v est équivalent à à l'enchaînement `Hashtbl.remove` t x; `Hashtbl.add` t x v.

Ainsi, si on réalise l'enchaînement

```
let t = Hashtbl.create 32 in
Hashtbl.add t "x" 1;
Hashtbl.add t "x" 2;
Hashtbl.replace t "x" 3;
let a = Hashtbl.find t "x" in
Hashtbl.remove t "x";
let b = Hashtbl.find t "x" in
...
```

on obtiendra pour `a` la valeur 3 et pour `b` la valeur 1.

Questions

1. On considère l'expression e suivante :

   ```
   let x = 1 + 2 in
   let y = 1 + 4 in
   x + x
   ```

   Détailler l'évaluation de l'expression e, en précisant à chaque étape le contenu de la table de hachage. Combien de fois est réalisée l'addition `1+2` ? Combien de fois est réalisée l'addition `1+4` ? Reconnaissez-vous le comportement d'une stratégie d'évaluation particulière ?

2. À quoi sert la ligne

   ```
   Hashtbl.replace env x (Cst v);
   ```

du cas `Var` ? Que se passerait-il si on l'enlevait ? L'évaluateur serait-il encore correct ? (justifier ou donner un contre-exemple)

3. À quoi sert la ligne

```
Hashtbl.remove env x;
```

du cas `Let` ? Que se passerait-il si on l'enlevait ? L'évaluateur serait-il encore correct ? (justifier ou donner un contre-exemple)

4. On veut reformuler cet évaluateur pour qu'il ne repose plus la modification d'une structure de données mutable. Définir des équations pour une fonction eval, telle que $\mathsf{eval}(e, \rho)$ évalue e dans l'environnement ρ et renvoie la valeur calculée *et* le nouvel environnement ρ' reflétant les modifications éventuelles de ρ. Le format de réponse est au choix : une définition mathématique ou du code caml.

Correction

1. Les deux `let` placent respectivement les expressions `1+2` et `1+4` dans l'environnement, puis on évalue l'expression finale `x+x`. Cette expression évalue d'abord une première fois `x` : on récupère l'expression `1+2`, on l'évalue en `3`, et on remplace l'association `x` $\mapsto$ `1+2` par l'association `x` $\mapsto$ `3`. Ensuite, on a une deuxième évaluation de `x` : on récupère cette fois directement `3` dans l'environnement modifié, sans besoin de plus d'évaluation. Appel par nécessité (évaluation paresseuse).
2. La ligne sert à mettre à jour l'environnement avec la valeur calculée. Si on l'enlevait l'évaluateur resterait correct car cela ne change pas la valeur produite (les expressions arithmétiques proposées ne font pas d'effets de bord).
3. La ligne sert à retirer de l'environnement une variable locale lorsque l'on sort de sa portée. Si on l'enlevait l'évaluateur deviendrait incorrect, en donnant le mauvais résultat par exemple sur : `let x=1 in (let x=2 in x) + x`