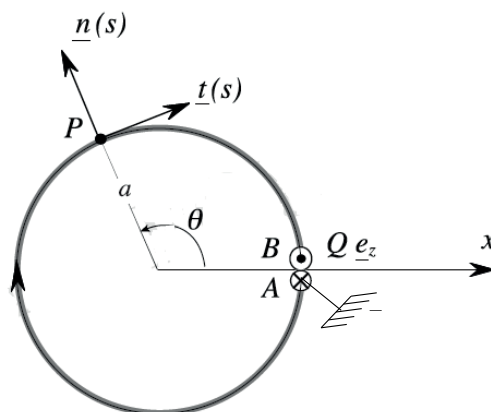


# 1 Anneau (45min - 5pts) - Corrigé temporaire et à réajuster

On considère une poutre courbe en forme d'anneau circulaire de rayon  $a$ . Cet anneau est sectionné. Afin de dimensionner objet, on cherche le déplacement de la structure lorsque celui-ci applique un effort au point  $B$ , d'intensité  $Q$ , normales au plan de la fibre moyenne de la poutre tel que  $\underline{R}_B = Q\underline{e}_z$ . Au point  $A$ , il y a un encastrement. On modélise l'anneau par une poutre homogène  $AB$  dont la ligne moyenne est constituée d'un cercle de rayon  $R$  centré en  $O$ . Sa section est circulaire et on notera  $d$  son diamètre qui est petit devant  $a$ . Le comportement du matériau est élastique linéaire isotrope et on appelle  $E$  son module d'Young. On fera l'hypothèse d'Euler-Bernoulli. L'origine des abscisses curvilignes est pris en  $A$  ( $s = 0$ ).



Remarque générale : on ne pas faire l'hypothèse problème plan car le chargement est hors plan. La géométrie que A et B peuvent être confondus donc  $\underline{AB} = \underline{0}$ . On pose aussi  $\alpha = 2\pi - \theta$  et le changement de variable  $s = a\alpha$ .

**Question 1.1 :** Déterminer les actions mécaniques au point  $A$ .

◊ Equilibre global : Il n'y a que deux AM en A et en B. PFS en A :

Résultante :

$$// \underline{e}_x : X_A = 0$$

$$// \underline{e}_y : Y_A = 0$$

$$// \underline{e}_z : Z_A + Q = 0 \text{ soit } Z_A = -Q$$

$$\text{Moment : } \underline{M}_A + \underline{AB} \wedge Q\underline{e}_z = \underline{0} \text{ soit } \underline{M}_A = \underline{0}$$

**Question 1.2 :** Déterminer la contrainte généralisée.

◊ Equilibre local :

Résultante :

$$// \underline{t} : \frac{dN}{d\alpha} + T_n = 0$$

$$// \underline{n} : \frac{dT_n}{d\alpha} - N = 0$$

$$// \underline{e}_z : \frac{dT_z}{d\alpha} = 0 \text{ soit } T_z = \text{cte. Par la CL en A, } T_z = Q$$

La résolution du système d'équation donne :  $N(\alpha) = \lambda_1 \cos \alpha + \lambda_2 \sin \alpha$  et  $T_n(\alpha) = \lambda_1 \sin \alpha - \lambda_2 \cos \alpha$ . Par la CL en A, on trouve  $\lambda_1 = 0$  et  $\lambda_2 = 0$ . Donc  $N = 0$  et  $T_n = 0$

Moment :

$$// \underline{t} : \frac{dM_t}{d\alpha} + M_n = 0$$

$$// \underline{n} : \frac{dM_n}{d\alpha} - M_t - aT_z = 0$$

//  $\underline{e}_z : \frac{dM_z}{d\alpha} + aT_n = 0$  soit  $M_z = cte$ . Par la CL en A,  $M_z = 0$ .

La résolution du système d'équation donne  $M_n(\alpha) = \mu_1 \cos \alpha + \mu_2 \sin \alpha$  et  $M_t(\alpha) = -\mu_1 \sin \alpha + \mu_2 \cos \alpha - aQ$ . Par la CL en A, on trouve  $\mu_1 = 0$  et  $\mu_2 = aQ$ . Donc  $M_n = aQ \sin \alpha$  et  $M_t = aQ(\cos \alpha - 1)$ .

**Question 1.3 :** Déterminer la déformation généralisée.

**Question 1.4 :** Déterminer le déplacement généralisé au point  $B$  avec les formules de Bresse dans la base  $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ .