

Université Paris-Sud/ Paris-Saclay
Faculté des Sciences d'Orsay
Master 1 Mécanique des Fluides (M1 MFL)
Année universitaire

Annales

Mécanique des Milieux Continus - Solides

Semestre 1, Session 1

Date

Durée : 3h

Nature de l'épreuve : questions

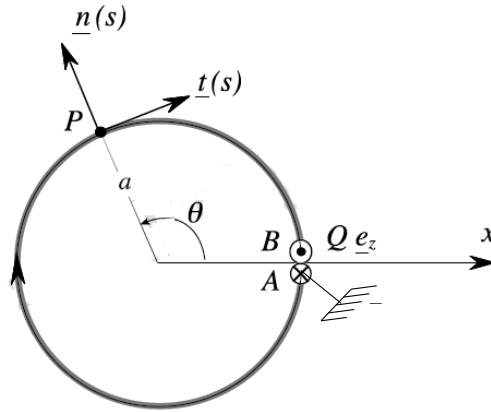
Sans document ni calculatrice

Les téléphones mobiles et tout appareil connectable doivent être éteints et déposés dans un sac fermé au sol

Un formulaire avec des formules nécessaires est donné dans les dernières pages du sujet. Tous les problèmes sont indépendants les uns des autres. Dans la mesure du possible, il vous est demandé de traiter chaque problème sur des intercalaires séparées.

1 Anneau (45min - 5pts)

On considère une poutre courbe en forme d'anneau circulaire de rayon a . Cet anneau est sectionné. Afin de dimensionner objet, on cherche le déplacement de la structure lorsque celui-ci applique un effort au point B , d'intensité Q , normales au plan de la fibre moyenne de la poutre tel que $\underline{R}_B = Q\underline{e}_z$. Au point A , il y a un encastrement. On modélise l'anneau par une poutre homogène AB dont la ligne moyenne est constituée d'un cercle de rayon R centré en O . Sa section est circulaire et on notera d son diamètre qui est petit devant a . Le comportement du matériau est élastique linéaire isotrope et on appelle E son module d'Young. On fera l'hypothèse d'Euler-Bernoulli. L'origine des abscisses curvilignes est pris en A ($s = 0$).



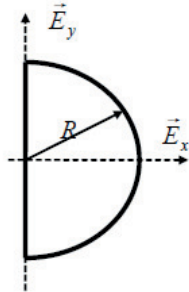
Question 2.1 : Déterminer les actions mécaniques au point A .

Question 2.2 : Déterminer la contrainte généralisée.

Question 2.3 : Déterminer la déformation généralisée.

Question 2.4 : Déterminer le déplacement généralisé au point B avec les formules de Bresse dans la base $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$.

2 Poutre demi cylindrique (45min - 5pts)



Une poutre droite, d'axe parallèle à $(O; \vec{E}_z)$ a une section droite en forme de demi cylindre de rayon R . Sa surface latérale n'est pas chargée et les forces de volume sont négligeables. Le matériau est supposé homogène, isotrope, à loi de comportement élastique linéaire de module d'Young E et de coefficient de Poisson ν . La longueur de la poutre est l .

Dans la base cartésienne $(\vec{E}_x, \vec{E}_y, \vec{E}_z)$ la matrice représentant l'état de contrainte est donnée par :

$$\begin{array}{lll} \sigma_{xx} = 0 & \sigma_{xy} = 0 & \sigma_{xz} = Axy \\ \sigma_{xy} = 0 & \sigma_{yy} = 0 & \sigma_{yz} = B + Cx^2 + Dy^2 \\ \sigma_{xz} = Axy & \sigma_{yz} = B + Cx^2 + Dy^2 & \sigma_{zz} = \frac{8P(z-l)y}{\pi R^4} \end{array}$$

A, B, C, D et P sont des constantes

- 1- Déterminer A, B, C, D en fonction de P, R et ν en utilisant les équations d'équilibre, les équations de Beltrami et les conditions aux limites.
- 2- Calculer les composantes du champ de déplacement associé.

3 Éprouvette de traction-torsion (1h30 - 10pts)

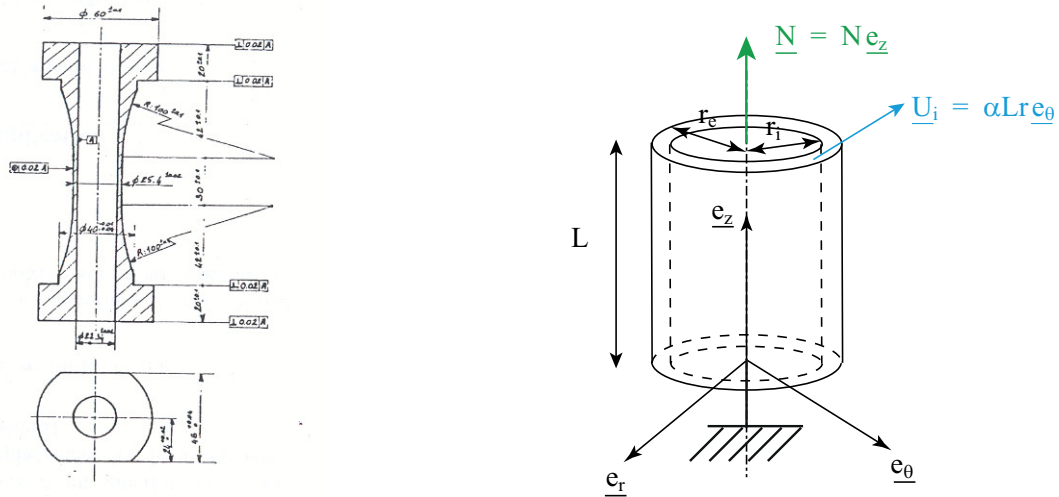


Figure 1 – Éprouvette de traction-torsion et Cylindre étudié

On considère la zone utile d'une éprouvette de traction-torsion (Fig. 1). Ce type d'éprouvette est utilisé pour déterminer expérimentalement l'allure du domaine d'élasticité d'un matériau (de type acier). Cette zone utile est modélisée par un cylindre mince (Fig. 1) de rayon intérieur r_i , de rayon extérieur r_e tels que $r_e = r_i + e$ et de longueur L . e est l'épaisseur du tube considérée faible devant r_i et r_e .

On étudiera le cylindre en statique sous l'hypothèse des petites perturbations. Les forces volumiques seront supposées nulles. Le matériau obéit à une relation de comportement élastique linéaire isotrope.

On utilisera les coordonnées cylindriques (r, θ, z) associées à la base $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$.

Le cylindre est soumis à une force répartie de manière uniforme sur l'extrémité du cylindre et la résultante projetée sur $\underline{e}_z$ a pour valeur N en $z = L$. Ces forces réparties sont nulles en projection sur $\underline{e}_r$. La torsion du tube est obtenue par déplacement imposé à l'extrémités du tube : en $z = L$, on impose $\underline{U}_i = \alpha L r \underline{e}_\theta$ (où α est un scalaire donné appelé angle de torsion, L la longueur de la zone utile et r le rayon courant) en laissant le déplacement libre dans les autres directions. L'autre extrémité du tube est une face encastree en chaque point.

3.1 Traction simple

Dans cet exercice, on fera l'hypothèse $\alpha = 0$; ainsi, le tube n'est sollicité qu'en traction.

Question 3.1.1 : On rappelle que c'est un tube et donc que $e \ll r_e$. Déterminer la section S du tube en fonction de r_e et e .

Question 3.1.2 : Déterminer l'action mécanique dans l'encastrement à partir de l'équilibre global de la poutre.

Question 3.1.3 : Écrire les équations du problème en distinguant équations cinématiques, équations d'équilibre et relation de comportement (exprimée en fonction de E et ν , respectivement module d'Young et coefficient de Poisson du matériau étudié.).

On intuite un champ de contraintes de la forme suivante où A est une constante.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}_{(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)}$$

Question 3.1.4 : Vérifier que $\underline{\underline{\sigma}}$ respecte l'équilibre local.

Question 3.1.5 : Déterminer la constante A à l'aide des conditions limites en fonction de N et S .

Question 3.1.6 : Déterminer le tenseur de Green-Lagrange linéarisé $\underline{\underline{\varepsilon}}$.

Question 3.1.7 : Déterminer le champ de déplacement $\underline{U}$ associé à cette sollicitation. Vérifier qu'il est cinématiquement admissible.

3.2 Torsion d'un tube cylindrique

Dans cet exercice, on fera l'hypothèse $N = 0$. Ainsi, le tube n'est sollicité qu'en torsion. On résoudra cet exercice par une méthode en déplacement.

Question 3.2.1 : On propose un champ de déplacement du type :

$$\underline{U} = f(r)g(z)\underline{e}_\theta$$

Justifier ce choix. À quelle condition $\underline{U}$ vérifie-t-il les conditions limites? Déterminer les relations satisfaites par f . Montrer qu'alors $f(r)$ est de la forme :

$$f(r) = Cr$$

où C est constante que l'on déterminera en fonction de α, L et $g(L)$. On remarque aussi que $\frac{df}{dr} = C$.

Question 3.2.2 : Déterminer l'opérateur des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$ puis l'opérateur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ en fonction de C , de $g(z)$ et des coefficients de Lamé λ et μ .

Question 3.2.3 : En utilisant le fait que $\underline{\underline{\sigma}}$ est statiquement admissible, déterminer $\underline{\underline{\sigma}}$ en fonction de C et de $g(z)$. Calculer $g(z)$ en fonction de z , L et $g(L)$.

Question 3.2.4 : Déterminer $\underline{U}$. Recalculer $\underline{\underline{\sigma}}$.

Question 3.2.5 : Expliquer la conséquence de l'hypothèse de tube mince formulée au début du problème sur la composante de cisaillement $\sigma_{\theta z}$.

3.3 Essai de traction-torsion - Application

Question 3.3.1 : Trouver la solution $(\underline{U}, \underline{\underline{\sigma}})$ du problème de départ.

Question 3.3.2 : Les propriétés de ce type d'éprouvette sont utilisées pour l'identification des domaines d'élasticité des matériaux métalliques. Le domaine d'élasticité, au sens du critère de Von Mises, peut être défini dans le plan $(\sigma_{zz}, \sigma_{z\theta})$ comme la région à l'intérieur de laquelle la contrainte équivalente de Von Mises ne dépasse pas la limite d'élasticité σ_E (ou σ_Y). Déterminer la contrainte de Von Mises en fonction de N et α .