

Université de Paris Saclay

Corrigé de l'examen

Sans documents - durée 3 heures

Problème

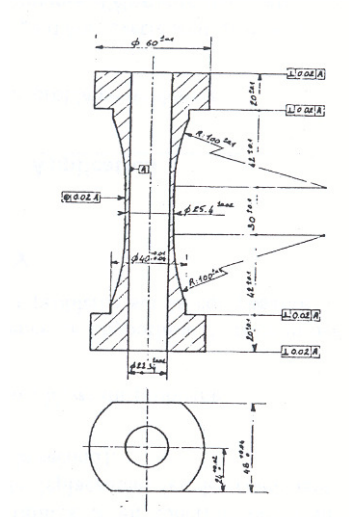


FIGURE 1 – Éprouvette de traction-torsion

On considère la zone utile d'une éprouvette de traction-torsion (Fig. 1). Ce type d'éprouvette est utilisé pour déterminer expérimentalement l'allure du domaine d'élasticité d'un matériau (de type acier). Cette zone utile est modélisée par un cylindre mince (Fig. 2) de rayon intérieur r_i , de rayon extérieur r_e tels que $r_e = r_i + e$ et de longueur L . e est l'épaisseur du tube considérée faible devant r_i et r_e .

On étudiera le cylindre en statique sous l'hypothèse des petites perturbations. Les forces volumiques seront supposées nulles; Le matériau obéit à une relation de comportement élastique linéaire isotrope.

On utilisera les coordonnées cylindriques (r, θ, z) associées à la base $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$.

Le cylindre est soumis à des forces réparties de manière uniforme sur les extrémités du cylindre et la résultante projetée sur $\underline{e}_z$ a pour valeur N en $z = L$, et $-N$ en $z = 0$. Ces forces réparties sont nulles en projection sur $\underline{e}_r$. La torsion du tube est obtenue par déplacement imposé aux extrémités du tube : en

$z = 0$, on a $u_\theta = 0$ et en $z = L$, on a $u_\theta = \alpha L r$ (où α est un scalaire donné appelé angle de torsion, L la longueur de la zone utile et r le rayon courant).

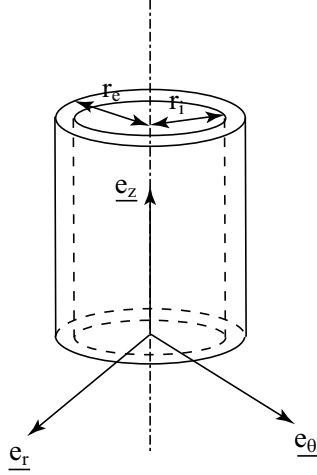


FIGURE 2 – Cylindre étudié

Partie 1 : Traction simple

Dans cet exercice, on fera l'hypothèse $\alpha = 0$; ainsi, le tube n'est sollicité qu'en traction.

Question 1.1 : Écrire les équations du problème en distinguant équations de liaison, équations d'équilibre et relation de comportement (exprimée en fonction de E et ν , respectivement module d'Young et coefficient de Poisson du matériau étudié.)

* **Équations de liaisons :** ce sont les équations relatives au déplacement $\underline{u}$:

$\underline{u}$ est régulier

$$\underline{e}_\theta \cdot \underline{u} = \alpha L r \text{ en } z = L$$

$$\underline{e}_\theta \cdot \underline{u} = 0 \text{ en } z = 0$$

* **Équations d'équilibre :** ce sont les équations relatives à $\underline{\underline{\sigma}}$:

$$\text{div} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{0}$$

$$\underline{e}_z \cdot \underline{\underline{\sigma}} \underline{e}_z = \frac{N}{S} \text{ en } z = L$$

$$\underline{e}_z \cdot \underline{\underline{\sigma}} \underline{e}_z = -\frac{N}{S} \text{ en } z = 0$$

$$\underline{e}_r \cdot \underline{\underline{\sigma}} \underline{e}_z = 0 \text{ en } z = L$$

$$\underline{e}_r \cdot \underline{\underline{\sigma}} \underline{e}_z = 0 \text{ en } z = 0$$

$$\underline{\underline{\sigma}} \underline{e}_r = \underline{0} \text{ sur } S_{Le}(r = r_e)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}(-\underline{e}_r) = \underline{0} \text{ sur } S_{Li}(r = r_i)$$

* **Relation de comportement :** c'est la loi de Hooke :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1 + \nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{1}$$

Question 1.2 : Écrire l'algorithme de résolution employé pour résoudre le problème.

La Figure 3 présente une méthode de résolution de Beltrami (ou en contraintes, c'est à dire qu'on intuite un champ de contraintes).

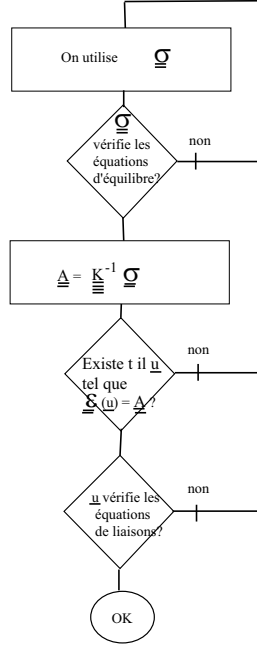


FIGURE 3 – Méthode de résolution de Beltrami

Question 1.3 : Résoudre le problème.

On intuite un champ de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$:

$$\underline{\underline{\sigma}} = cte = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{N}{S} \end{bmatrix}_{(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)}$$

$\underline{\underline{\sigma}}$ est bien statiquement admissible ; il vérifie les conditions d'équilibre.

On calcule :

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} Tr(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{1}}$$

Ce qui donne,

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -\frac{\nu}{E} \frac{N}{S} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{E} \frac{N}{S} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{E} \frac{N}{S} \end{bmatrix}_{(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)}$$

Existe t'il $\underline{u}$ tel que $\underline{\epsilon}(\underline{u}) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{Grad}}(\underline{u}) + \underline{\underline{Grad}}(\underline{u})^T) = \underline{\underline{A}}$?

Comme $\underline{\underline{A}} = cte$, $\underline{u} = \underline{\underline{A}} \underline{OM}$. D'où,

$$\underline{u} = \frac{N}{ES} \begin{bmatrix} -\nu & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ z \end{bmatrix}$$

Finalement,

$$\underline{u} = \frac{N}{ES} (-\nu r \underline{e}_r + z \underline{e}_z)$$

Ensuite, il faut vérifier que $\underline{u}$ est cinématiquement admissible, c'est à dire que $\underline{u}$ vérifie les équations de liaisons. Ce qui est vrai ici.

Question 1.4 : La solution est-elle unique? Préciser.

Non, ici la solution n'est pas unique. Il faut rajouter à cette solution particulière de $\underline{\epsilon}(\underline{u}) = \underline{\underline{A}}$ la solution générale $\underline{\epsilon}(\underline{u}) = \underline{\underline{0}}$. La solution générale correspond aux mouvement de corps rigide du système (rotation et translation globale) qui peut s'écrire :

$$\underline{u} = \underline{u}_0 + \underline{\Omega}_0 \wedge \underline{OM}$$

Cependant, il faut aussi que les mouvements de corps rigides soient cinématiquement admissibles. C'est à dire :

$$\forall (r, \theta) \text{ en } z = 0 \text{ et } z = L,$$

$$\underline{u}_\theta \cdot \underline{e}_\theta = 0$$

$$\underline{\Omega}_0 \cdot \underline{e}_z = 0$$

Partie 2 : Torsion d'un tube cylindrique

Dans cet exercice, on fera l'hypothèse $N = 0$. Ainsi, le tube n'est sollicité qu'en torsion. On résoudra cet exercice par une méthode en déplacement.

Question 2.1 : Écrire l'algorithme de résolution employé pour résoudre le problème.

La Figure 4 présente une méthode de résolution de Navier (ou en déplacement, c'est à dire qu'on intuite un champ de déplacement).

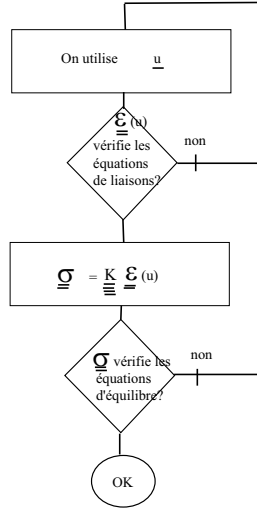


FIGURE 4 – Méthode de résolution de Navier

Question 2.2 : On propose un champ de déplacement du type :

$$\underline{u}(M) = f(r)g(z)\underline{e}_\theta$$

Justifier ce choix. À quelle condition $\underline{u}$ vérifie-t-il les équations de liaison? Montrer qu'alors $f(r)$ est de la forme :

$$f(r) = Cr$$

où C est constante que l'on déterminera.

Tout d'abord, on intuite un champ de déplacement :

$$\underline{u}(M) = f(r)g(z)\underline{e}_\theta$$

Le problème étant axisymétrique, le déplacement est indépendant de θ à priori.

Ensuite, il faut que $\underline{u}$ vérifie les équations de liaisons.

$$\forall r \text{ en } z = 0, \quad \underline{u} \cdot \underline{e}_\theta = f(r)g(0) = 0$$

$$\forall r \text{ en } z = L, \quad \underline{u} \cdot \underline{e}_\theta = f(r)g(L) = \alpha Lr \quad \text{soit} \quad f(r) = \frac{\alpha Lr}{g(L)} \text{ avec } C = \frac{\alpha L}{g(L)}$$

$$\forall r \text{ en } z = L, \quad \frac{\alpha L r}{g(L)} g(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad g(0) = 0$$

Question 2.3 : Déterminer l'opérateur des déformations $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u})$ puis l'opérateur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ en fonction des composantes du champ de déplacement (et des coefficients de Lamé λ et μ pour le second).

On calcule $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{Grad}}(\underline{u}) + \underline{\underline{Grad}}(\underline{u})^T)$

Ce qui donne,

$$\underline{\underline{Grad}}(\underline{u}) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{r}f(r)g(z) & 0 \\ f'(r)g(z) & 0 & f(r)g'(z) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)}$$

D'où,

$$\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & f'(r)g(z) - \frac{f(r)g(z)}{r} & 0 \\ f'(r)g(z) - \frac{f(r)g(z)}{r} & 0 & f(r)g'(z) \\ 0 & f(r)g'(z) & 0 \end{bmatrix}_{(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)}$$

On remarque que (astuce du diable!) $f'(r)g(z) - \frac{f(r)g(z)}{r} = Cg(z) - \frac{Crg(z)}{r} = 0$.
Finalement,

$$\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Crg'(z) \\ 0 & Crg'(z) & 0 \end{bmatrix}_{(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)}$$

Question 2.4 : Déterminer la solution $(\underline{u}, \underline{\underline{\sigma}})$ du problème.

On calcule

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu\underline{\underline{\epsilon}} + \lambda Tr(\underline{\underline{\epsilon}})\underline{\underline{1}}$$

Ce qui donne,

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mu Crg'(z) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)}$$

Maintenant, il faut s'assurer que $\underline{\underline{\sigma}}$ est statiquement admissible.

* $\text{div} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{0}$: cette condition est respectée si $g''(z) = 0 \Rightarrow g(z) = az + b$, or $g(0) = 0$ d'où $g(z) = g(L) \frac{z}{L}$.

* $\underline{\underline{\sigma}} \underline{e}_r = \underline{0}$ en $r = r_e$ et $r = r_i$, ce qui est vrai.

* $\underline{e}_z \cdot \underline{\underline{\sigma}} \underline{e}_r = \underline{0}$ en $z = 0$ et $z = L$, ce qui est vrai.

* $\underline{e}_r \cdot \underline{\underline{\sigma}} \underline{e}_r = \underline{0}$ en $z = 0$ et $z = L$, ce qui est vrai.

Finalement, la solution $(\underline{u}, \underline{\underline{\sigma}})$ du problème s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{u} = \alpha r z \underline{e}_\theta \\ \underline{\underline{\sigma}} = \mu \alpha r \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right._{(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)}$$

Question 2.5 : Expliquer la conséquence de l'hypothèse de tube mince formulée au début du problème sur la composante de cisaillement $\sigma_{\theta z}$.

Si l'épaisseur du tube est mince, on peut admettre que les contraintes sont uniformément réparties sur l'épaisseur e du tube. C'est à dire que la composante $\sigma_{\theta z}$ est à peu près constante sur l'épaisseur e du tube.

Partie 3 : Essai de traction-torsion - Application

Question 3.1 : Trouver la solution du problème de départ.

Dans les deux premières parties, on a résolu deux problèmes linéaires. Par linéarité, la solution du problème général est la somme des deux solutions issues des deux premières parties. D'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{u} = \frac{N}{ES} (-\nu r \underline{e}_r + z \underline{e}_z) + \alpha r z \underline{e}_\theta \\ \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \alpha r \\ 0 & \mu \alpha r & \frac{N}{S} \end{bmatrix} \end{array} \right._{(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)}$$

Question 3.2 : Les propriétés de ce type d'éprouvette sont utilisées pour l'identification des domaines d'élasticité des matériaux métalliques. Le domaine d'élasticité, au sens du critère de Von Mises, peut être défini dans le plan $(\sigma_{zz}, \sigma_{z\theta})$ comme la région à l'intérieur de laquelle la contrainte équivalente de Von Mises ne dépasse pas la limite d'élasticité σ_E (ou σ_Y). La contrainte équivalente de Von Mises σ_{VM} est définie par :

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{3}{2} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}_D^2)},$$

$$\text{ou} \underline{\underline{\sigma}}_D = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3} Tr(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{1}}.$$

Déterminer la contrainte de Von Mises en fonction de N et α .

Il faut respecter le critère de Von Mises :

$$\sigma_{VM} < \sigma_E$$

Pour cela, on calcule $\underline{\underline{\sigma}}_D$:

$$\underline{\underline{\sigma}}_D = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \frac{N}{S} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \frac{N}{S} & \mu \alpha r \\ 0 & \mu \alpha r & -\frac{2}{3} \frac{N}{S} \end{bmatrix}_{(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)}$$

Alors, le critère de Von Mises s'écrit :

$$\frac{N^2}{S^2} + 3\mu^2 \alpha^2 r^2 < \sigma_E^2$$

Annexe : Formulaire

Expression du l'opérateur gradient d'un vecteur : $\underline{V} = V_r \underline{e}_r + V_\theta \underline{e}_\theta + V_z \underline{e}_z$:

$$\underline{\underline{Grad}}(\underline{V}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - V_\theta \right) & \frac{\partial V_r}{\partial z} \\ \frac{\partial V_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_r \right) & \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial V_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{bmatrix}_{(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)}$$

Loi de Hooke :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} Tr(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{1}}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu \underline{\underline{\epsilon}} + \lambda Tr(\underline{\underline{\epsilon}}) \underline{\underline{1}}$$