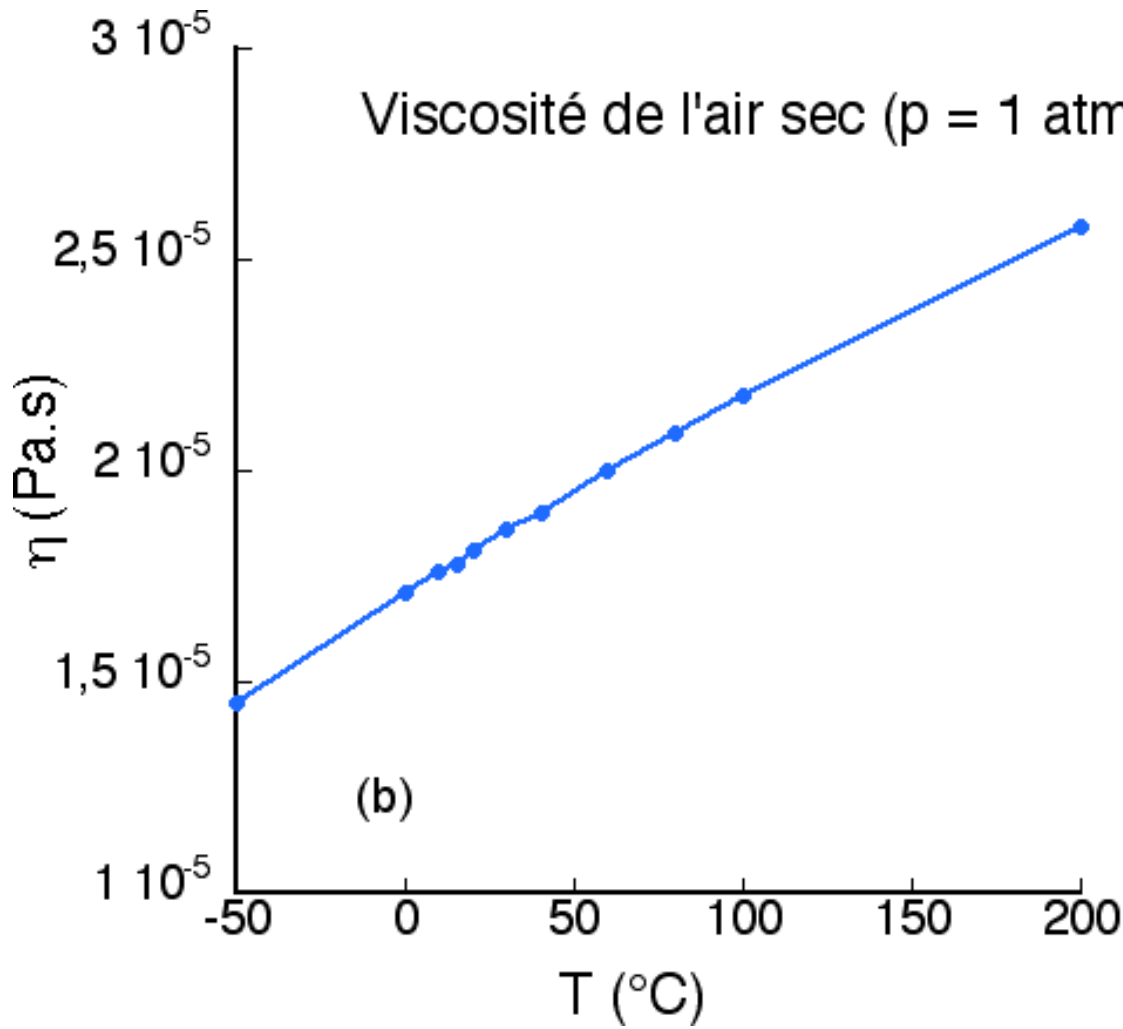
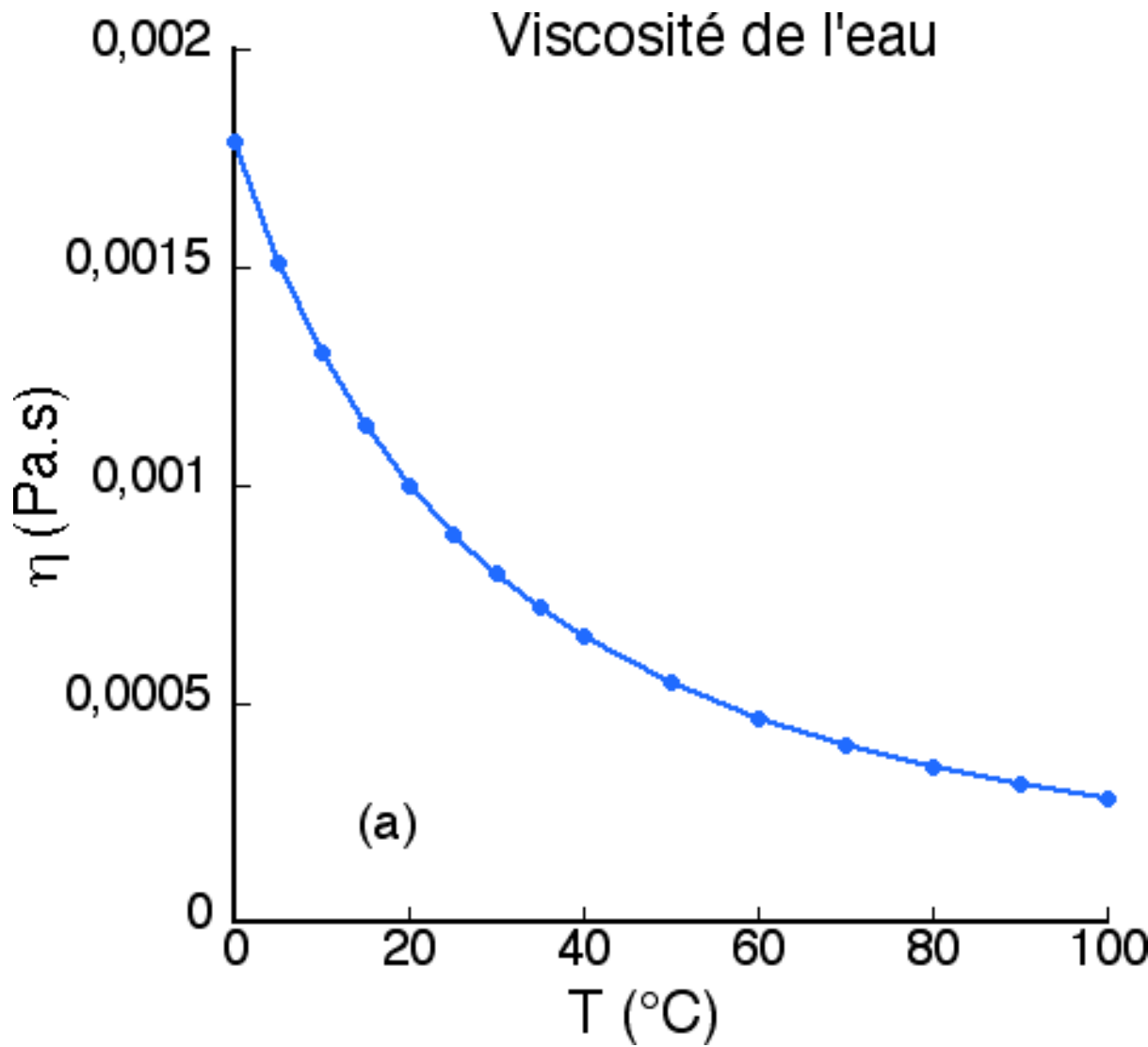
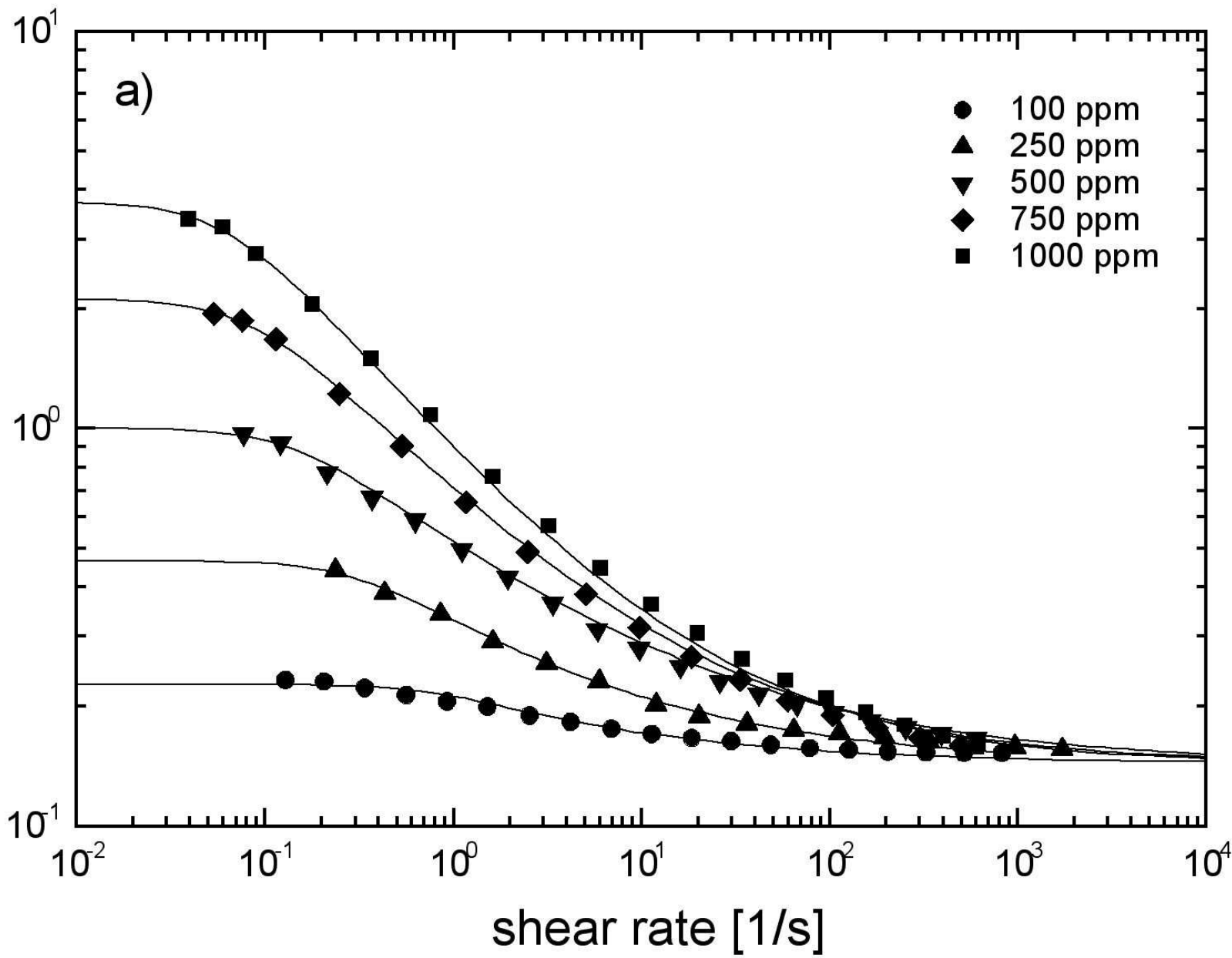


Equations de Navier-Stokes

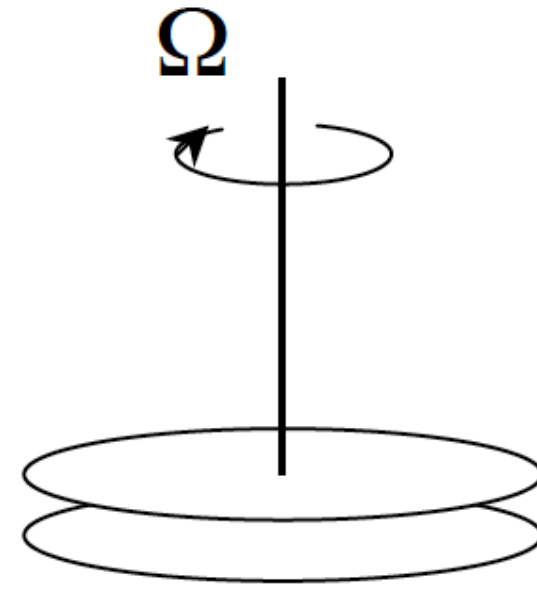
Partie 1

	Viscosité dynamique $\eta \text{ (Pa.s)}$	Viscosité cinématique $\nu = \frac{\eta}{\rho} \text{ (m}^2/\text{s)}$
Eau (20°C)	10^{-3}	$1,006 \cdot 10^{-6}$
Air (20°C)	$18,2 \cdot 10^{-6}$	$15,1 \cdot 10^{-6}$
Glycérine (20°C)	1,49	$1180 \cdot 10^{-6}$
Mercure (20°C)	$1,55 \cdot 10^{-3}$	$0,116 \cdot 10^{-6}$
CO_2 (20°C, 1 atm.)	$14,7 \cdot 10^{-6}$	$8,03 \cdot 10^{-6}$
H_2 (20°C, 1 atm.)	$8,83 \cdot 10^{-6}$	$105 \cdot 10^{-6}$

TAB. 6.1 – Tableau donnant les viscosités de quelques fluides à 20°C.

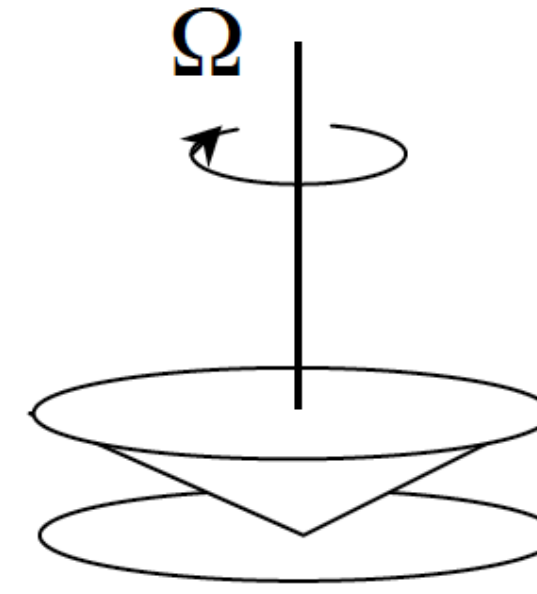


Viscosimètres (ou rhéomètres) de Couette



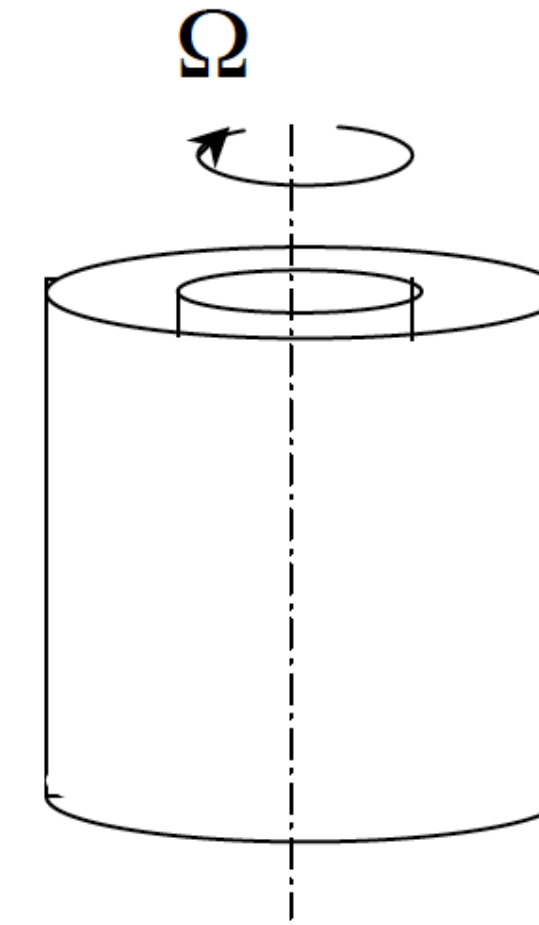
Couette plan

deux disques parallèles
l'un fixe, l'autre en rotation.
Très simple mais avec
l'inconvénient que le taux de
cisaillement dépend de r



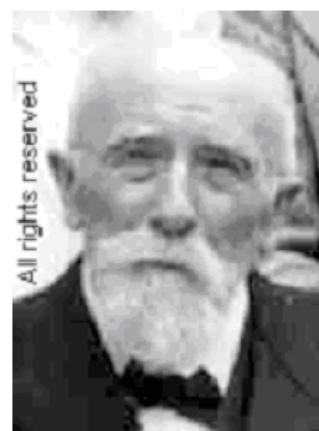
Cône-plan

un cône en rotation au-dessus
d'un disque fixe.
L'avantage est que le taux de
cisaillement ne dépend pas de r .
Un autre avantage est la faible
quantité de liquide à utiliser



Couette cylindrique

deux cylindres
concentriques, le cylindre
intérieur tournant,
l'extérieur fixe
(cf TD 5)



Maurice Couette
(1858-1943)
physicien français



*Le viscosimètre construit et
utilisé par Maurice Couette
pour mesurer la viscosité de
l'eau et de l'air en 1888*

Rhéomètres
à vitesse imposée
(mesure du couple)
à contrainte imposée
(mesure de vitesse)

Un rhéomètre actuel

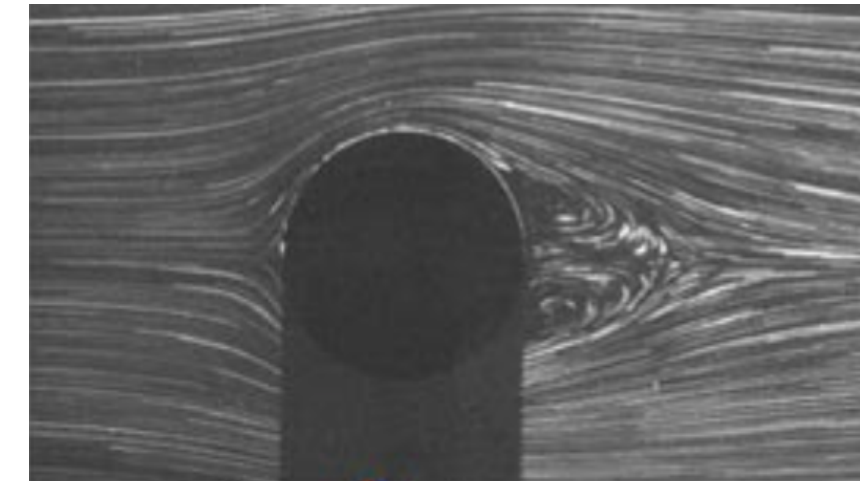


CONDITIONS LIMITES

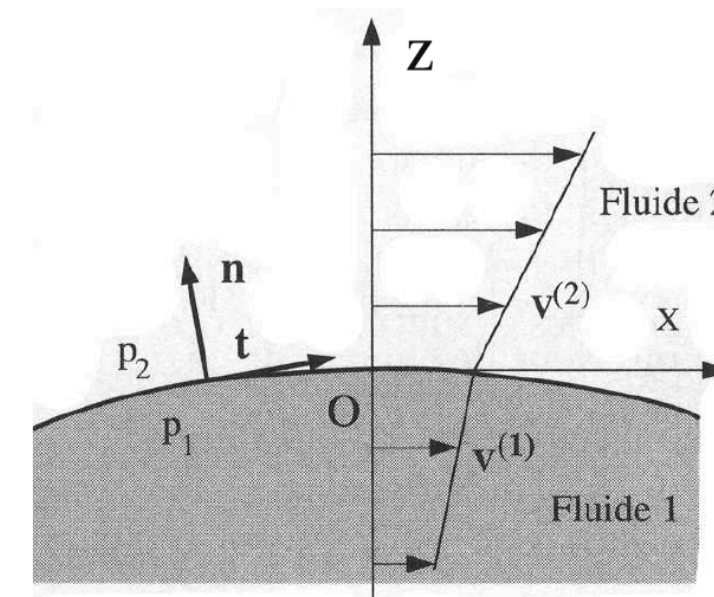
conditions cinématiques sur une paroi ou à l'interface $\xi(x,y,z,t)$ de deux fluides 1 et 2

- continuité de la vitesse (normale et tangentielle)

$$\mathbf{u}_{\text{fluide}} = \mathbf{u}_{\text{paroi}} \text{ à une paroi}$$



$$\mathbf{u}_1(\xi) = \mathbf{u}_2(\xi) \text{ à une interface en } \xi$$

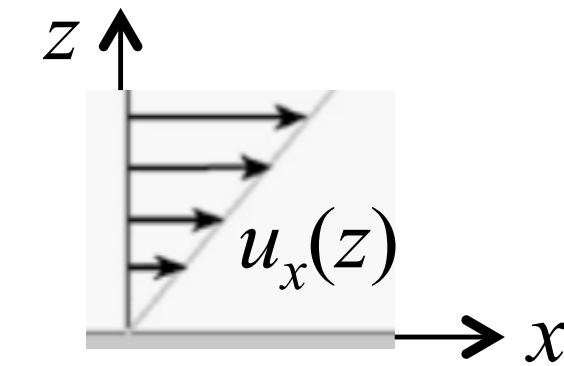


CONDITIONS LIMITES

conditions dynamiques sur une paroi ou à l'interface de deux fluides

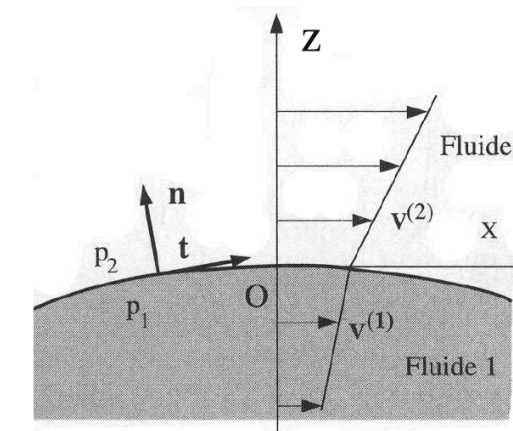
- existence d'une contrainte tangentielle à une paroi

$$\sigma_{xz}|_{paroi} = \eta \frac{\partial u_x}{\partial z} \Big|_{paroi}$$



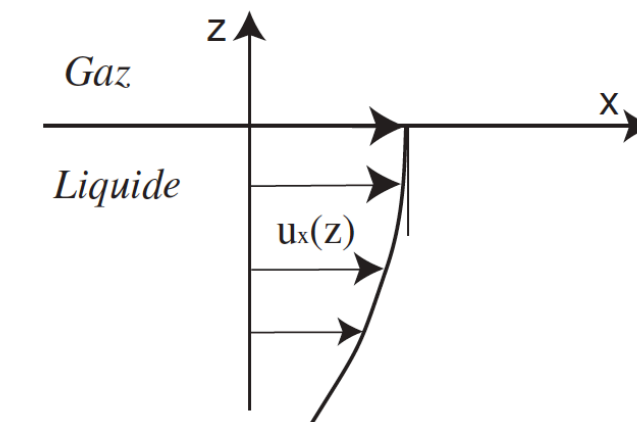
- continuité de la contrainte tangentielle à la traversée d'une interface

$$\eta_1 \frac{\partial u_{1x}}{\partial z} \Big|_{\xi} = \eta_2 \frac{\partial u_{2x}}{\partial z} \Big|_{\xi}$$



cas particulier à une surface libre (interface entre un liquide et un gaz au repos) :
pas de contrainte tangentielle

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} \Big|_{\xi} = 0$$



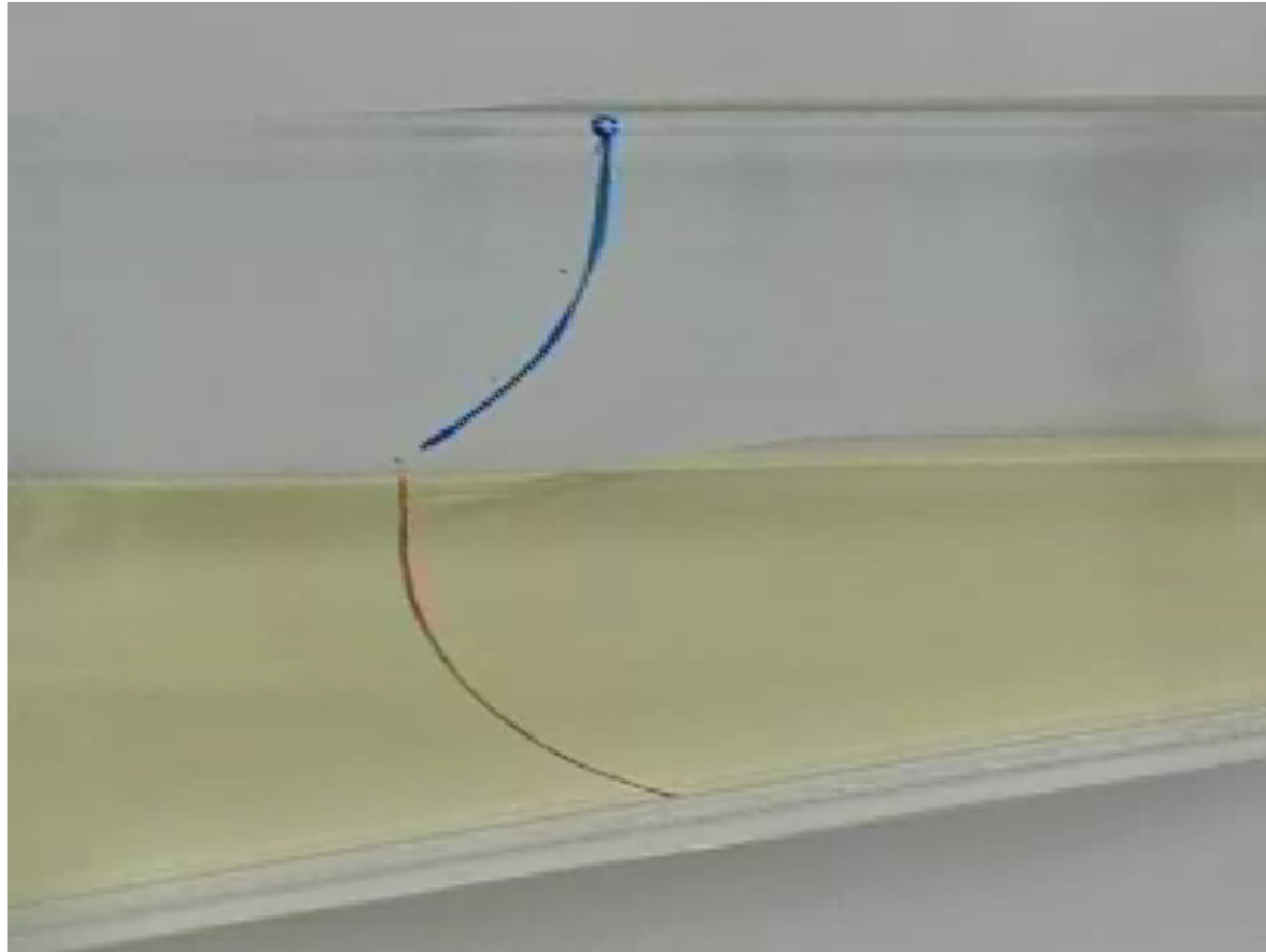
- continuité de la pression à la traversée d'une interface plane

$$p_1(\xi) = p_2(\xi)$$

- discontinuité de la pression à la traversée d'une interface courbe

$$\Delta p = \gamma_{12} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad \begin{array}{l} \text{Loi de Laplace} \\ R_{1,2} \text{ rayons de courbure de l'interface} \end{array}$$

Conditions aux limites : deux liquides dans un récipient oscillant



Si le champ de vitesse est de la forme $\mathbf{u} \begin{cases} u_x(x, y, z, t) \\ u_y = 0 \\ u_z = 0 \end{cases}$ les équations de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \rho g_x \\ \rho \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + \rho g_y \\ \rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z \end{cases}$$

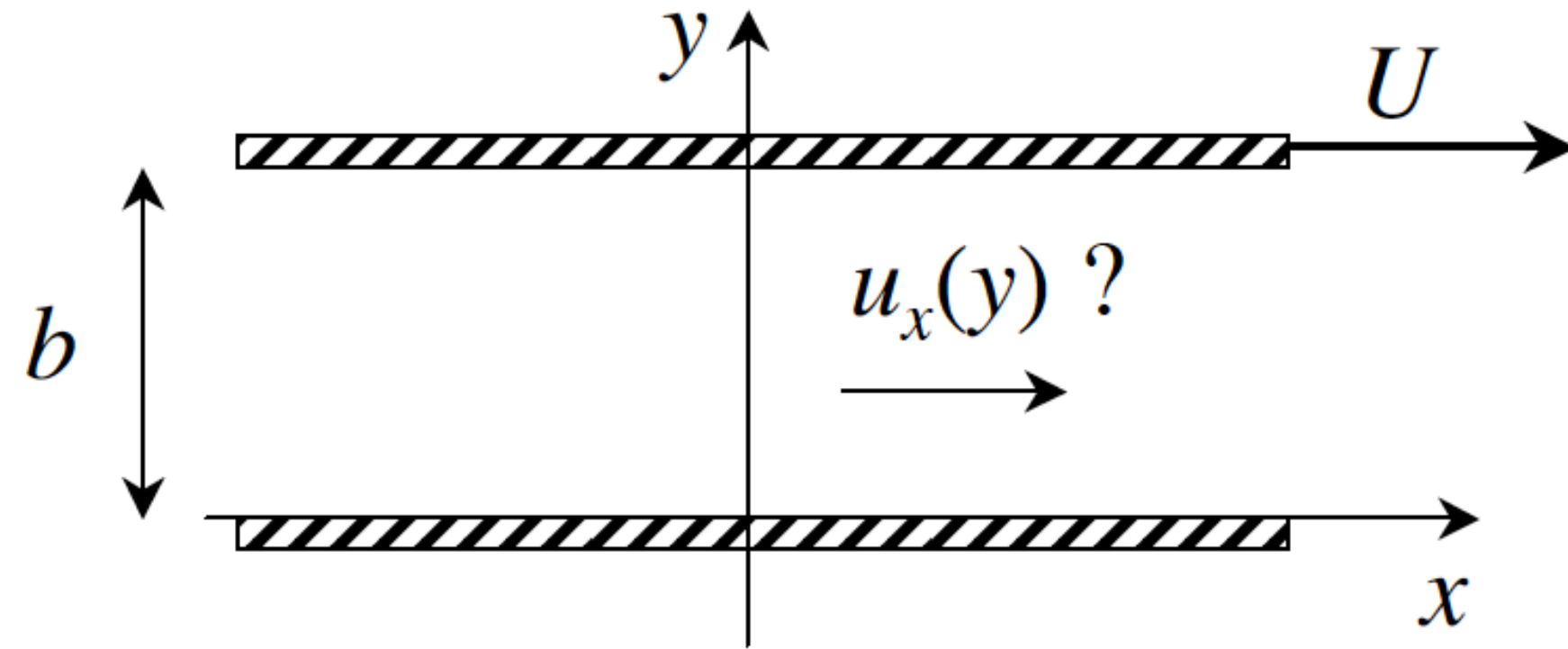
se simplifient considérablement :

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \rho g_x \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z \end{cases}$$

! Le fait qu'il existe une solution d'écoulement parallèle ne signifie pas qu'elle est la seule possible et donc observée dans la réalité...

En pratique, la solution d'écoulement parallèle est observée jusqu'à un nombre de Reynolds critique Re_c au delà duquel une autre solution non-parallèle des équations de Navier-Stokes est observée, stationnaire ou instationnaire voire turbulente. La valeur Re est forcément supérieure à 1, parfois très supérieure.

Couette Plan



Hyp : - fluide entre 2 plaques // distantes de b , l'une fixe l'autre mobile à la vitesse U
- écoulement stationnaire ($U = \text{cte}$)

Question : quel est le profil de vitesse ?

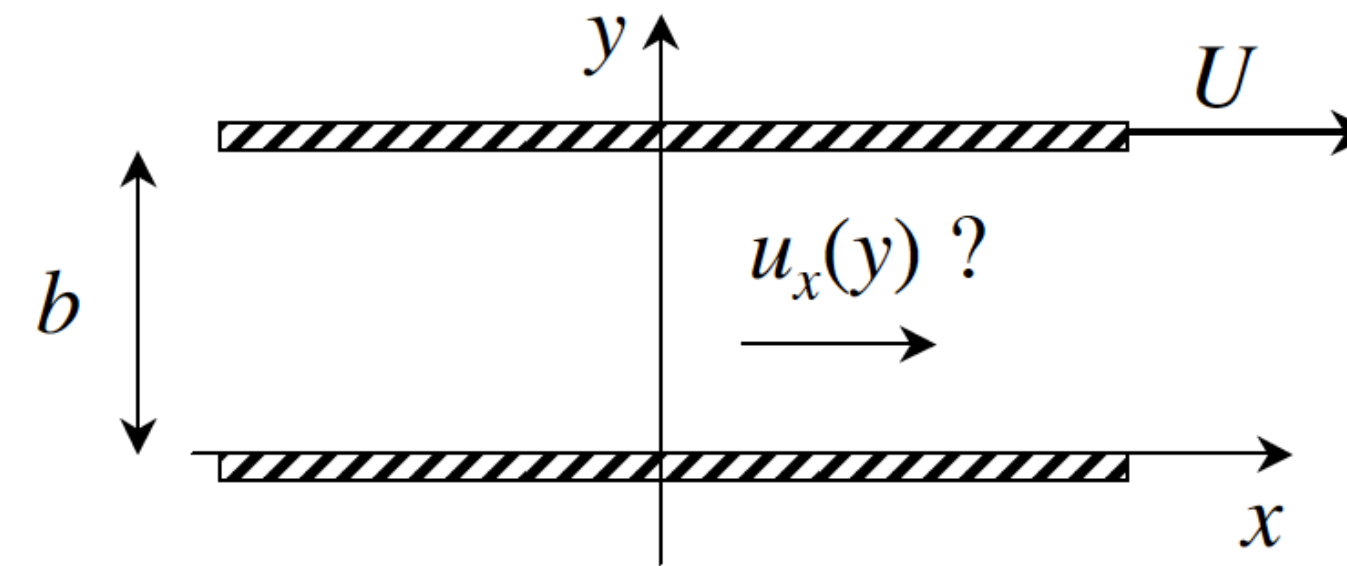
Compte-tenu de la géométrie, cherchons une solution possible d'écoulement parallèle instationnaire de la forme

$$\mathbf{u} \begin{cases} u_x(y) \\ u_y = 0 \end{cases}$$

L'écoulement est ici induit par le mouvement de la plaque,
pas par la gravité ni par un gradient de pression

L'équation de Navier-Stokes suivant x

$$\cancel{\rho} \frac{\partial \cancel{u_x}}{\partial t} = -\cancel{\frac{\partial p}{\partial x}} + \eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \cancel{\rho g_x}$$



se réduit à

$$0 = \eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = A$$

$$u_x = Ay + B \quad \text{avec 2 CL : } u_x(y=0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$u_x(y=b) = U \Rightarrow A = U/b$$

La solution est

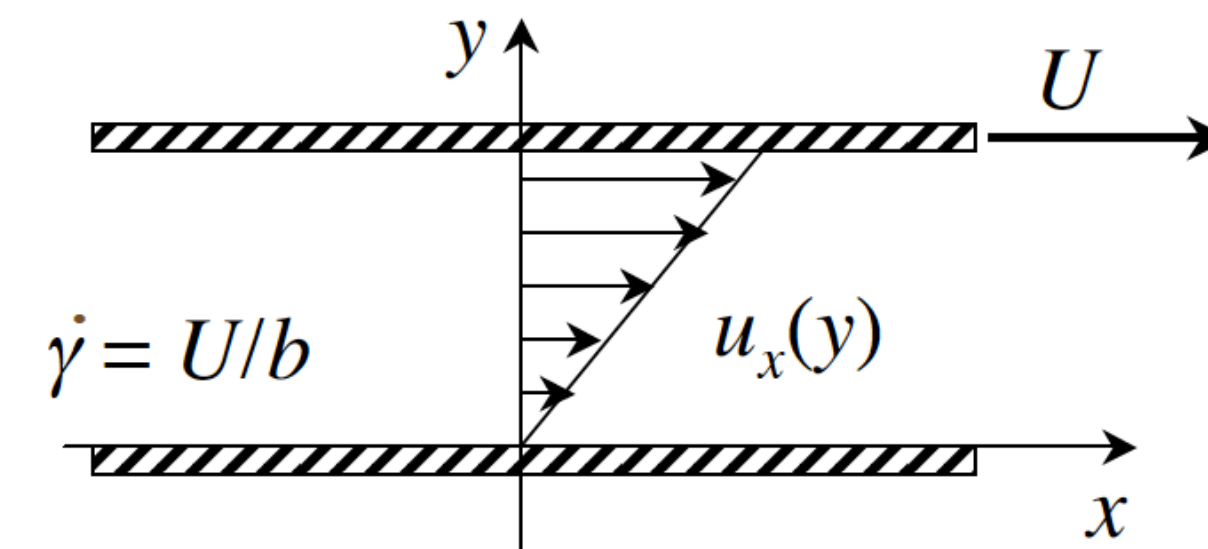
$$u_x(y) = \frac{U}{b} y$$

profil de vitesse linéaire

taux de cisaillement constant

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{U}{b}$$

La viscosité n'intervient pas dans cet écoulement stationnaire caractérisé par un profil de vitesse établi

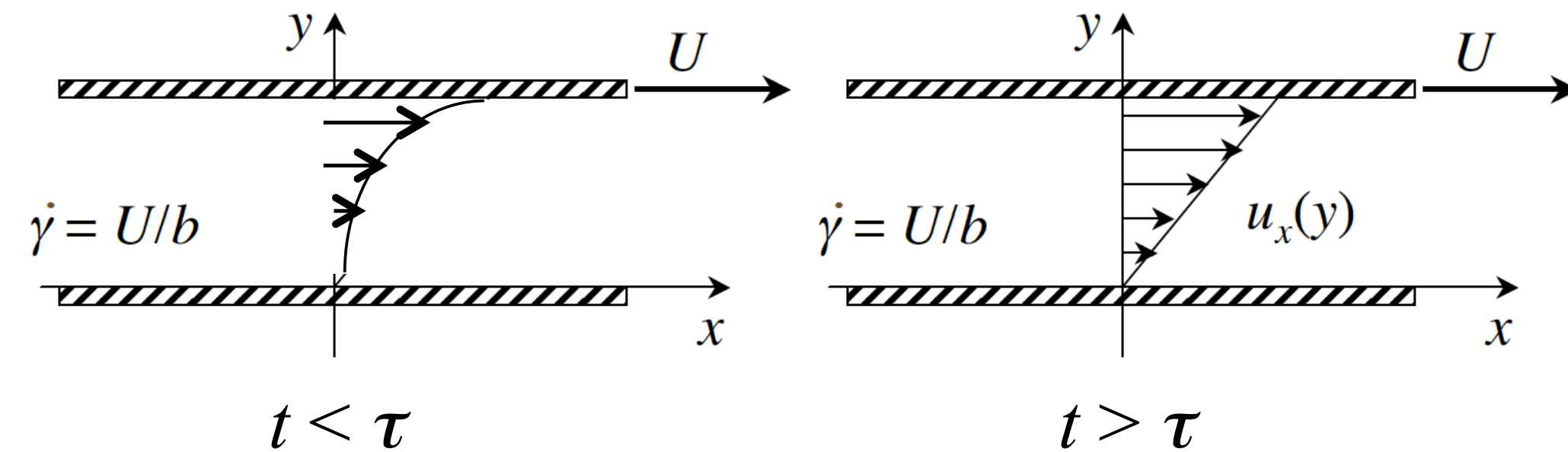


La viscosité intervient par contre dans le transitoire d'établissement du profil de vitesse. Le temps typique du régime transitoire avant le régime stationnaire correspond au temps τ de diffusion de la couche limite sur la distance b entre plaques à partir du temps $t = 0$ où la vitesse U est imposée à la plaque

$$\delta = (\nu t)^{1/2}$$

$\delta = b$ quand $t = \tau$:

$$\tau = \frac{b^2}{\nu}$$



Ce temps de transitoire est d'autant plus grand que b est grand et que ν est petit

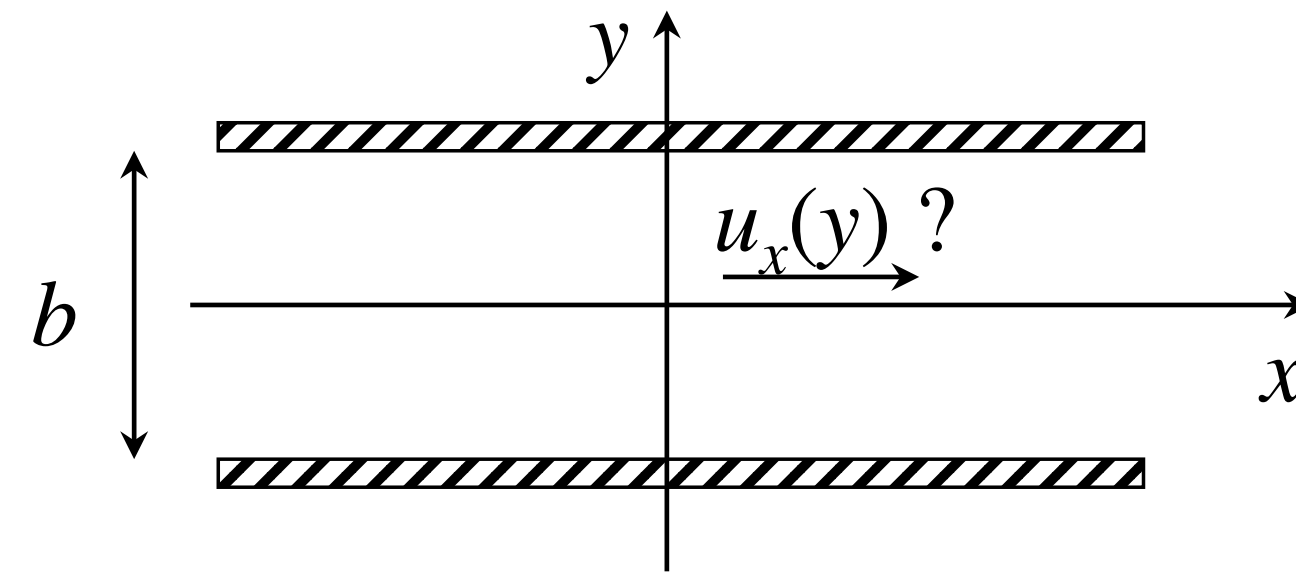
La viscosité intervient également dans la contrainte (force) à appliquer sur la plaque pour la maintenir en déplacement à vitesse constante

$$\sigma_{xy} = \eta \frac{\partial u_x}{\partial y} = \eta \frac{U}{b}$$

Cette contrainte est proportionnelle à la viscosité et au gradient de vitesse constant entre plaques.

La plupart des viscosimètres sont basés sur cet écoulement de Couette.

Poiseuille



Hyp : - fluide entre 2 plaques fixes // distantes de b
 - écoulement stationnaire induit par gradient de pression
 (différence de pression Δp appliquée entre l'entrée et la sortie distantes de L)

Question : quel est le profil de vitesse ?

Compte-tenu de la géométrie, cherchons une solution possible d'écoulement parallèle instationnaire de la forme $\mathbf{u} \begin{cases} u_x(y) \\ u_y = 0 \end{cases}$

L'écoulement est induit par un gradient de pression
pas par un mouvement paroi ni par la gravité

L'équation de Navier-Stokes suivant x

$$\cancel{\rho} \frac{\partial \cancel{u_x}}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \cancel{\rho g_x}$$

se réduit à $0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$

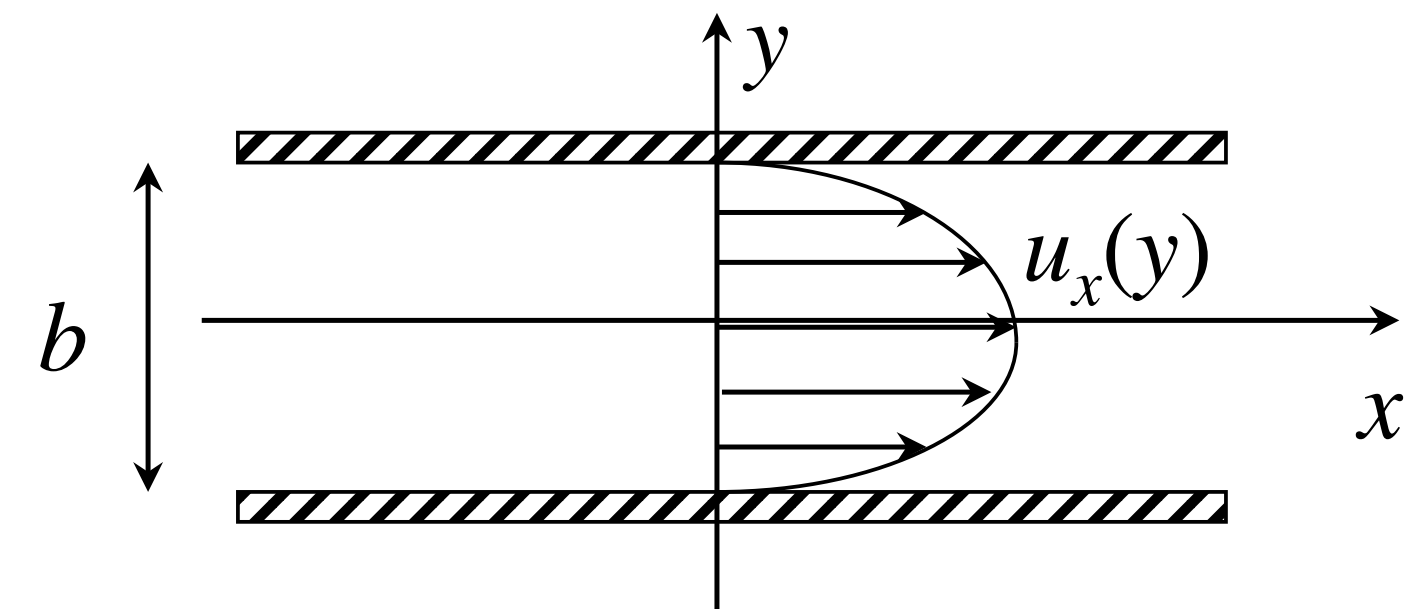
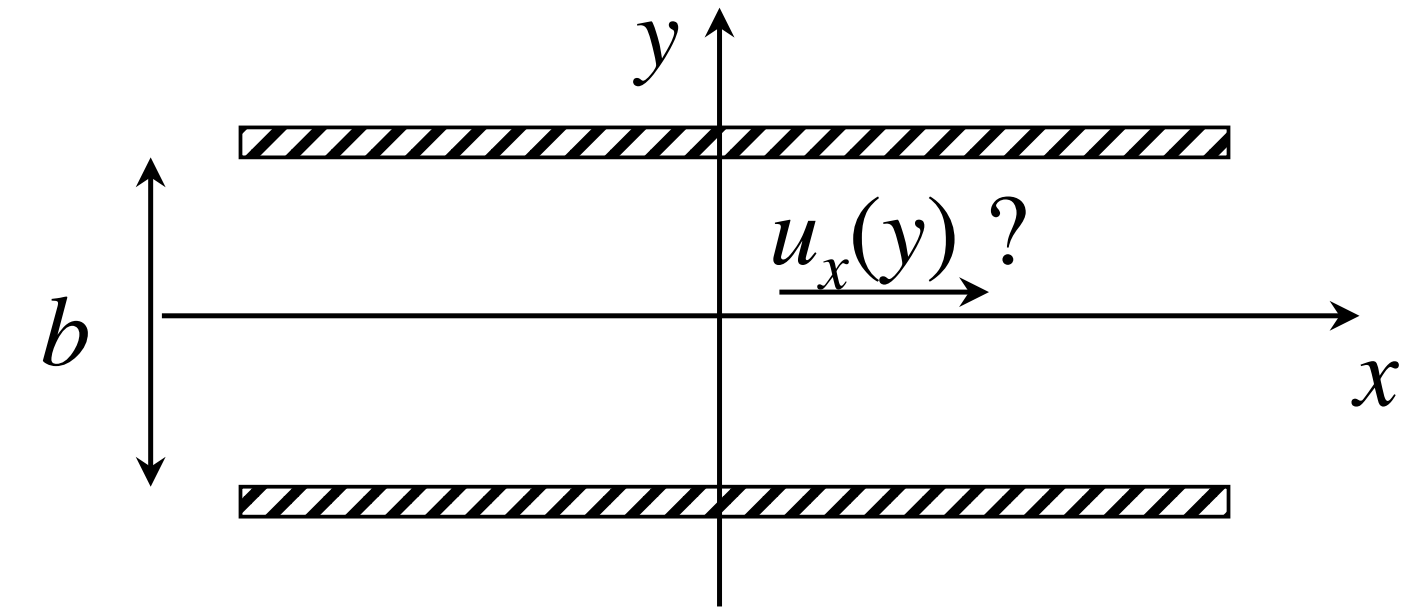
A noter que $\partial p / \partial x$ est forcément constant car u_x ne dépend pas de x ($\partial p / \partial x = \Delta p / L$)

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} y + A$$

$$u_x = -\frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + Ay + B \quad \text{avec 2 CL : } \begin{aligned} u_x(y = b/2) &= 0 \\ u_x(y = -b/2) &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \text{d'où } A &= 0 \\ \text{et } B &= \dots \end{aligned}$$

ce qui donne

$$u_x(y) = U_0 \left[1 - \left(\frac{y}{b/2} \right)^2 \right] \quad \text{avec } U_0 = -\frac{b^2}{8\eta} \frac{\partial p}{\partial x}$$



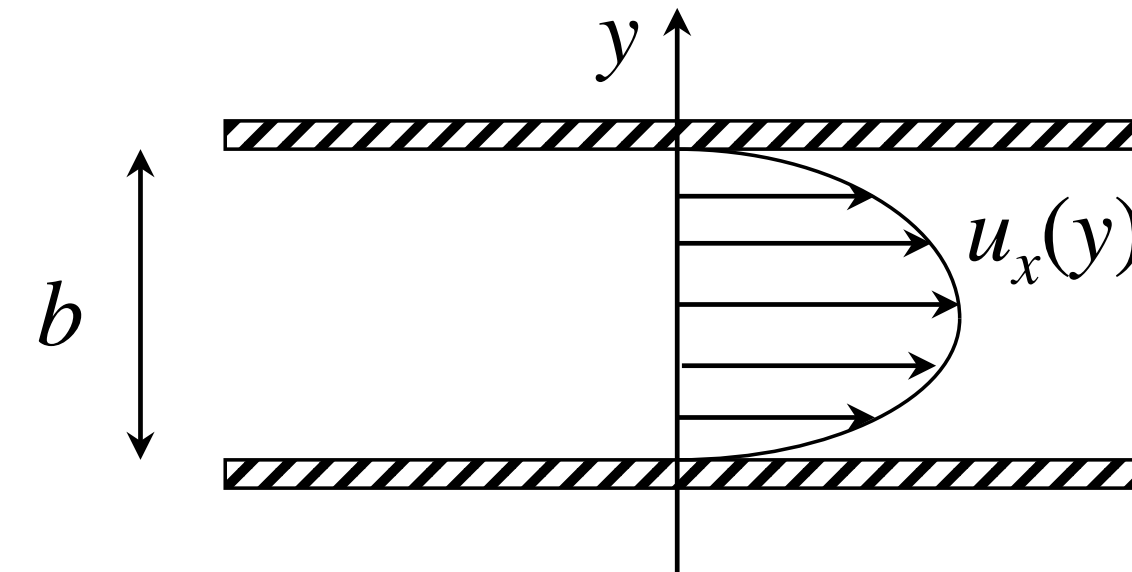
Le profil de vitesse est parabolique (“profil de Poiseuille”)

avec une vitesse maximale U_0 au centre

La vitesse est dans le sens opposé du gradient de pression ($u_x > 0$ si $\partial p / \partial x < 0$)

Le débit (par unité de largeur transverse) est

$$q = \int_{-b/2}^{+b/2} u_x(y) dy = -\frac{b^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x}$$



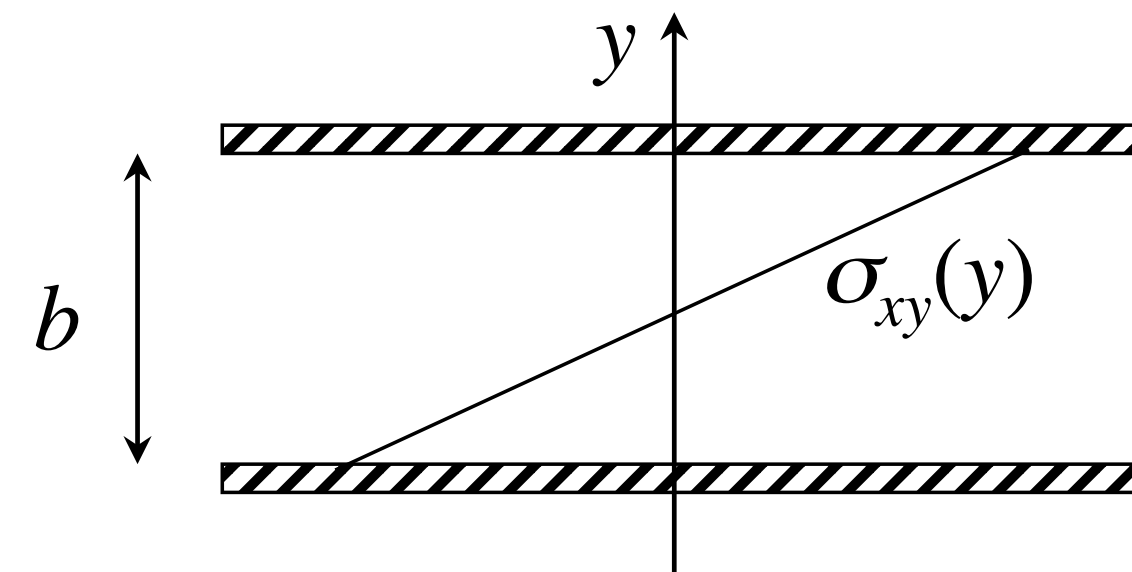
On constate que le débit est proportionnel au gradient de pression, inversement proportionnelle à la viscosité et qu'il varie très fortement avec la distance entre plaques

La vitesse moyenne "débitante" est

$$\bar{U} = \frac{q}{b} = -\frac{b^2}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{2}{3} U_0$$

Le profil de contrainte est

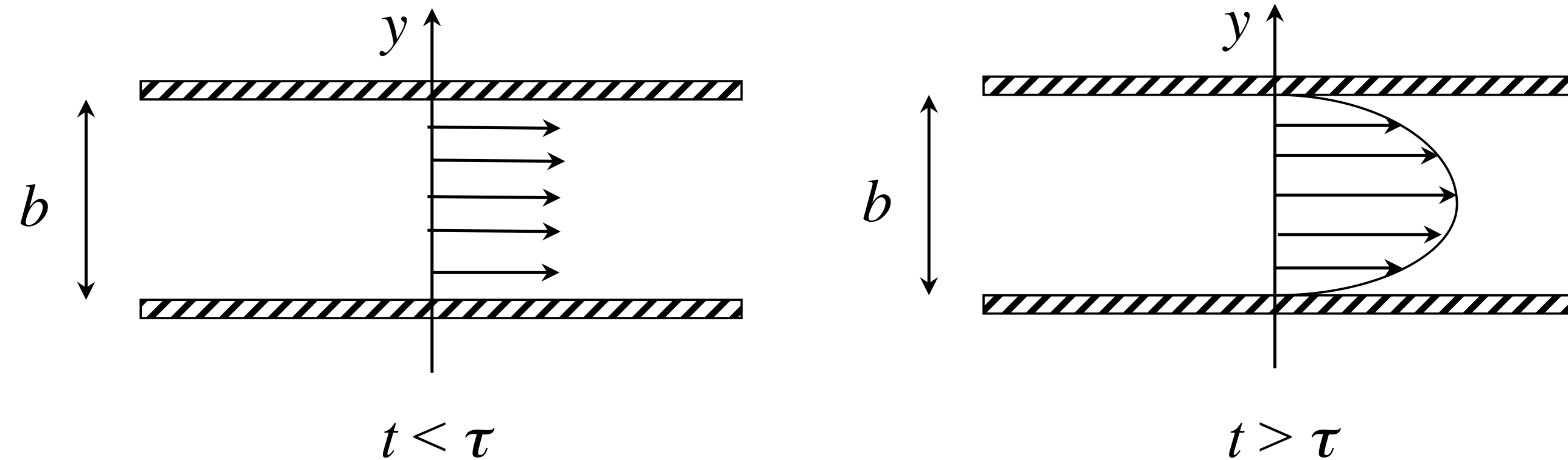
$$\sigma_{xy} = \eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} y$$



La contrainte est nulle au centre et maximale aux parois

La contrainte apparaît comme ne pas dépendre de la viscosité, mais elle en dépend en fait via le gradient de pression

Quel est le temps de transitoire avant l'établissement du profil parabolique de Poiseuille ?



Le temps typique du régime transitoire avant le régime stationnaire correspond au temps τ de diffusion de la couche limite sur la distance b entre plaques à partir du temps $t = 0$ où le gradient de pression est imposé

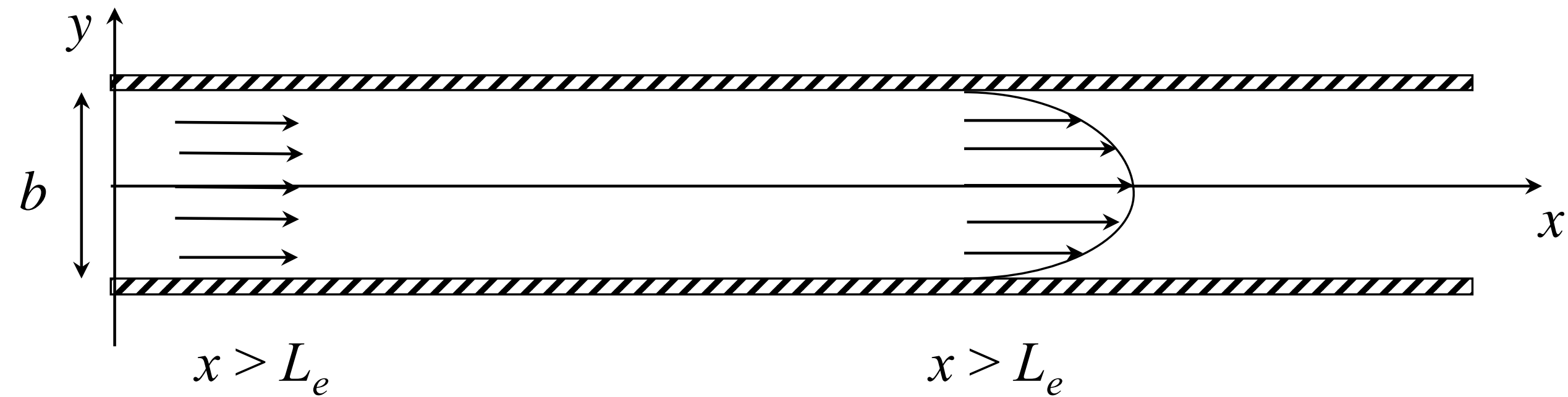
$$\delta = (\nu t)^{1/2}$$

$\delta = b/2$ quand $t = \tau$:

$$\tau = \frac{b^2}{4\nu}$$

Ce temps de transitoire est d'autant plus grand que b est grand et que ν est petit

Quelle est la longueur d'établissement L_e du profil parabolique de Poiseuille ?



Cette longueur d'établissement est également gouvernée par la compétition entre la diffusion des couches limites et l'advection par l'écoulement

$$\delta = (\nu t)^{1/2} \qquad x = Ut$$

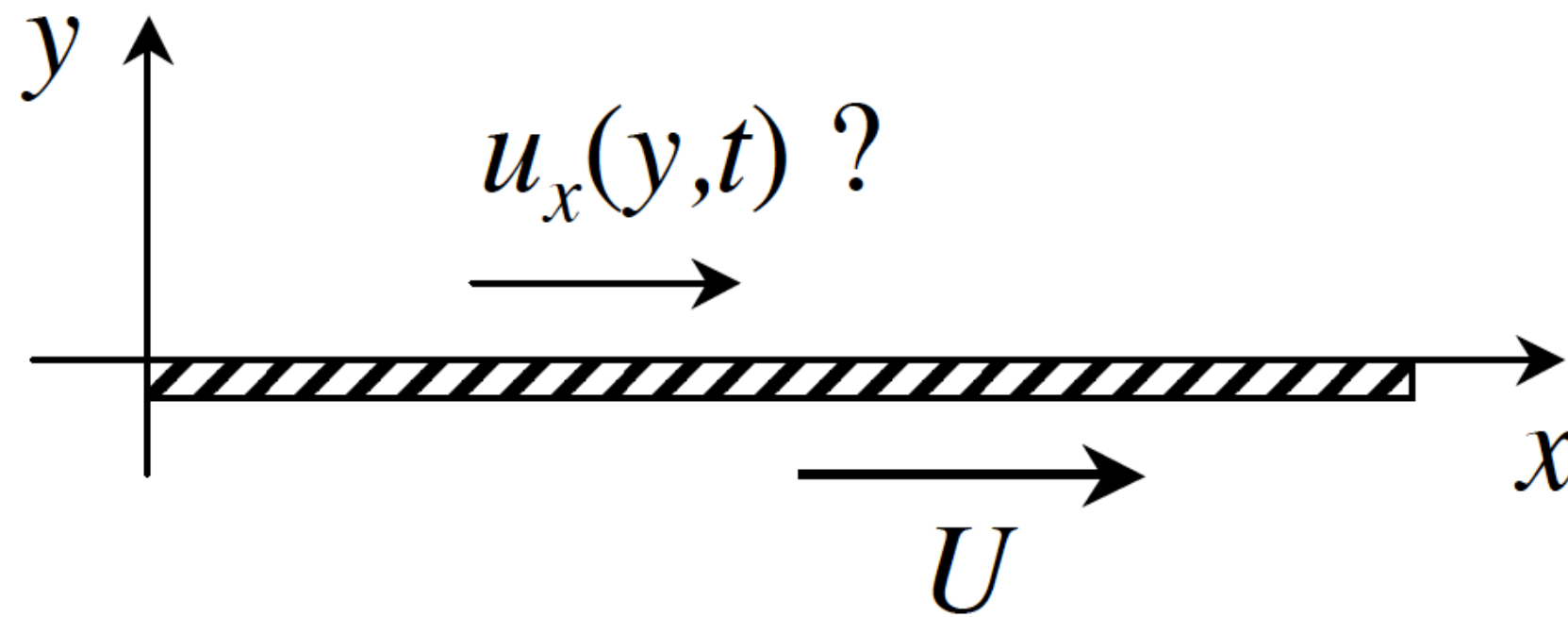
$$x = L_e \text{ quand } \delta = b/2$$

$$L_e = \frac{b^2}{4\nu} U = \frac{\text{Re}}{4} b$$

Cette longueur d'établissement est proportionnelle à l'espace entre plaques et au nombre de Reynolds

Solutions instationnaires

Mise en mouvement d'une plaque



- Hyp :
- fluide en $y > 0$ au repos à $t < 0$
 - plaque plane en $y = 0$ immobile ($U = 0$) à $t < 0$
puis mobile ($U = \text{cte} \neq 0$) à $t \geq 0$
 - écoulement 2D (x, y)

Question : quel est l'écoulement à $t > 0$?

Compte-tenu de la géométrie, cherchons une solution possible d'écoulement parallèle instationnaire de la forme

$$\mathbf{u} \begin{cases} u_x(y, t) \\ u_y = 0 \end{cases}$$

L'écoulement est ici induit par le mouvement de la plaque,
pas par la gravité ni par un gradient de pression

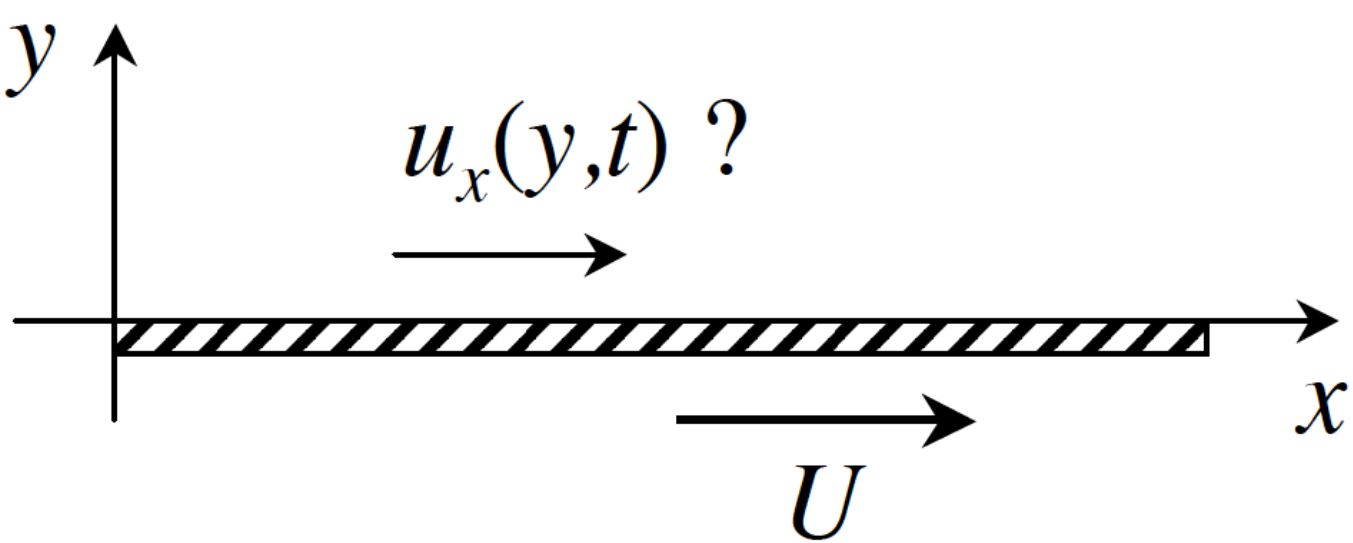
L'équation de Navier-Stokes suivant x

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial t} = -\cancel{\frac{\partial p}{\partial x}} + \eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \cancel{\rho g_x}$$

se réduit à

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \quad (1) \quad \text{où } \nu = \frac{\eta}{\rho} \text{ est le coefficient de viscosité cinématique}$$

(en m²/s)



Avant de résoudre cette équation, on peut estimer l'ordre de grandeur de chacun des termes

$$\frac{U}{t} = \nu \frac{U}{\delta^2} \quad \text{où } \delta \text{ est l'épaisseur caractéristique sur laquelle varie la vitesse, appelée } \mathbf{couche\ limite}$$

On en déduit que $\delta^2 = \nu t$

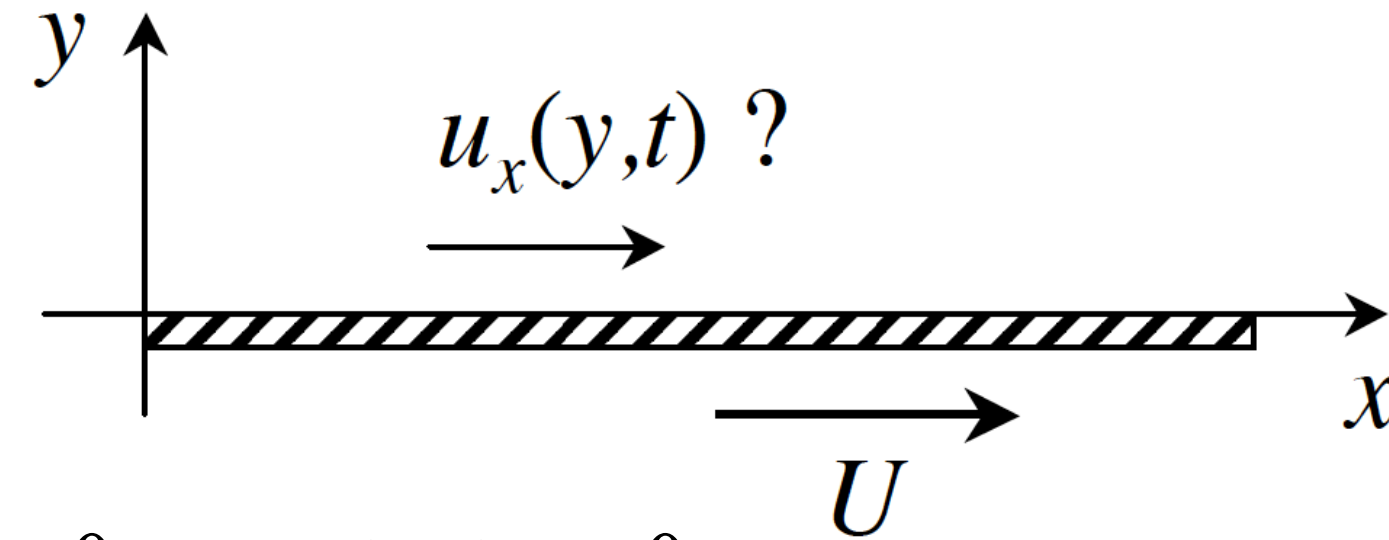
$$\delta = (\nu t)^{1/2}$$

Dans ce problème instationnaire, on s'attend donc à ce que l'épaisseur de couche limite augmente en temps et soit plus importante pour un fluide de viscosité cinématique plus forte

	eau	air
ρ (kg/m ³)	1000	1,29
η (Pa.s)	10 ⁻³	1,85 10 ⁻⁵
ν (m ² /s)	10 ⁻⁶	1,4 10 ⁻⁵

Réolvons maintenant l'équation

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \quad (1)$$



avec C.I. : $u_x(y, t=0) = 0$ pour tout $y > 0$

C.L. : $u_x(y=0, t) = U$ pour tout $t > 0$

$u_x(y=+\infty, t) = 0$ pour tout $t > 0$

Cette équation est identique à l'équation de diffusion de la chaleur $\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$

L'éq. (1) est invariante par transformation $y \rightarrow \alpha y$, $t \rightarrow \alpha^2 t$

On peut donc chercher une solution $u_x = f(\xi)$ avec $\xi = y/(\nu t)^{1/2}$

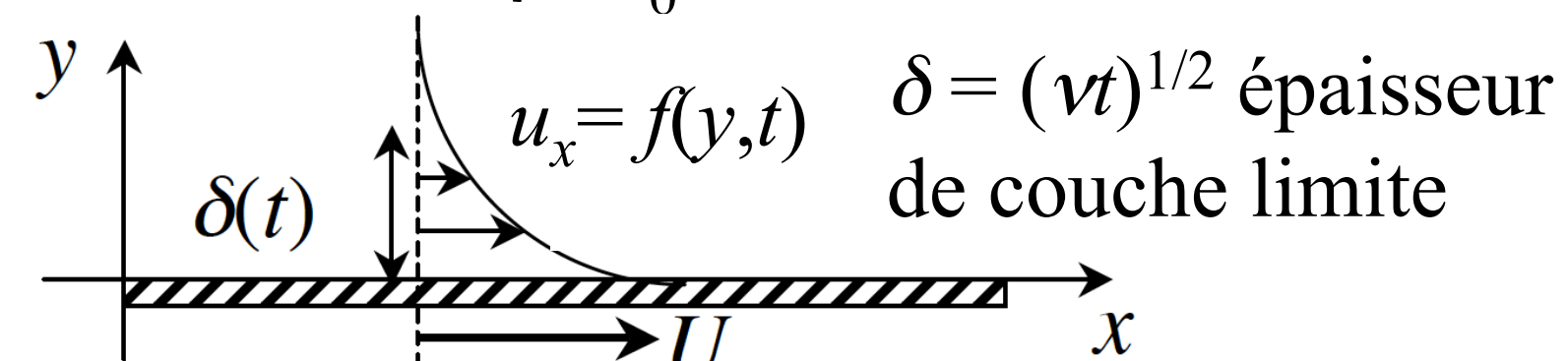
L'éq. (1) s'écrit alors

$$f''(\xi) + \frac{1}{2} \xi f'(\xi) = 0 \quad \text{avec CL : } f(0) = U$$

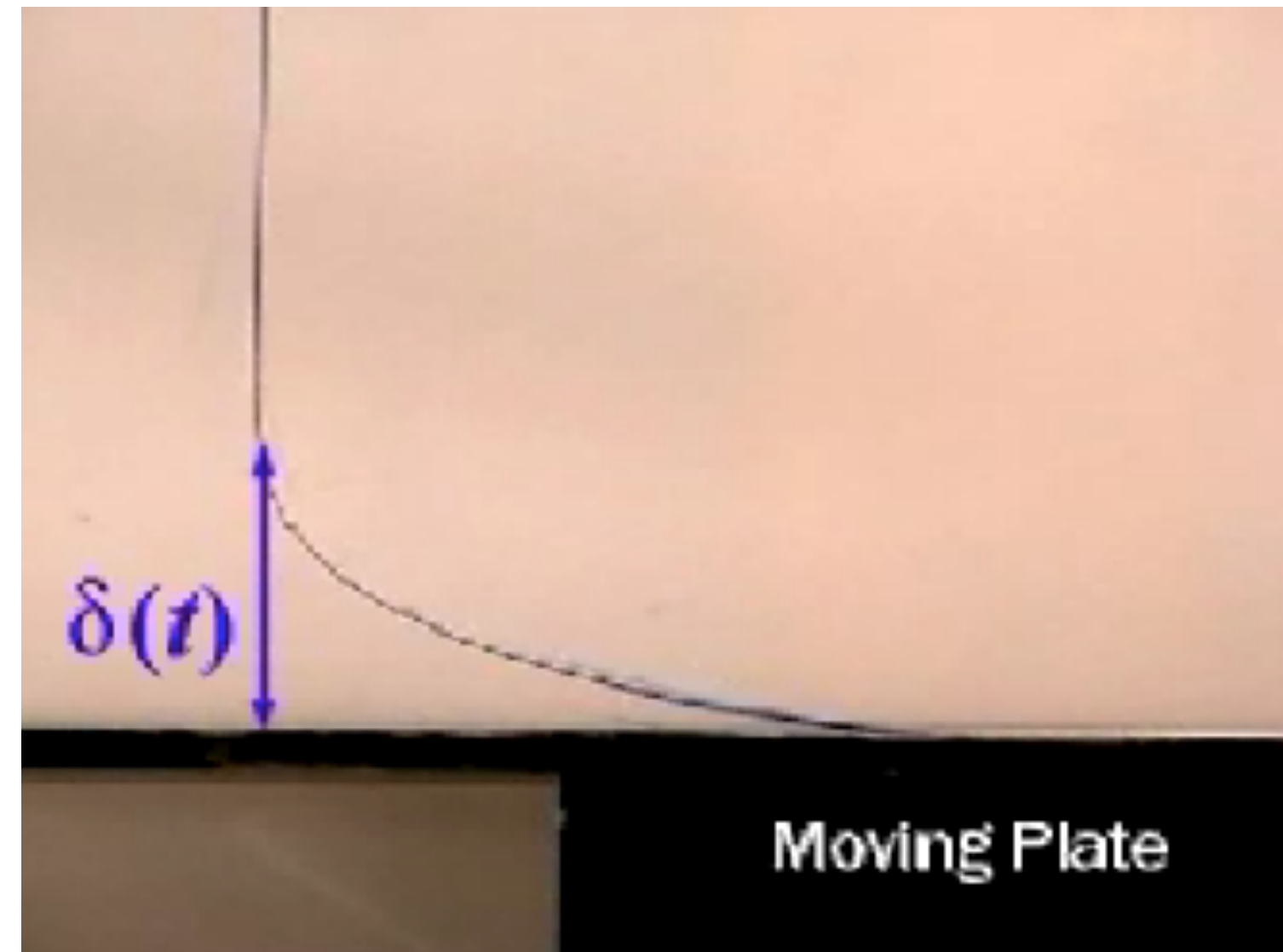
$$f(+\infty) = 0$$

La solution est

$$u_x(\xi) = U[1 - \text{erf}(\xi/2)] \quad \text{avec } \text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy$$



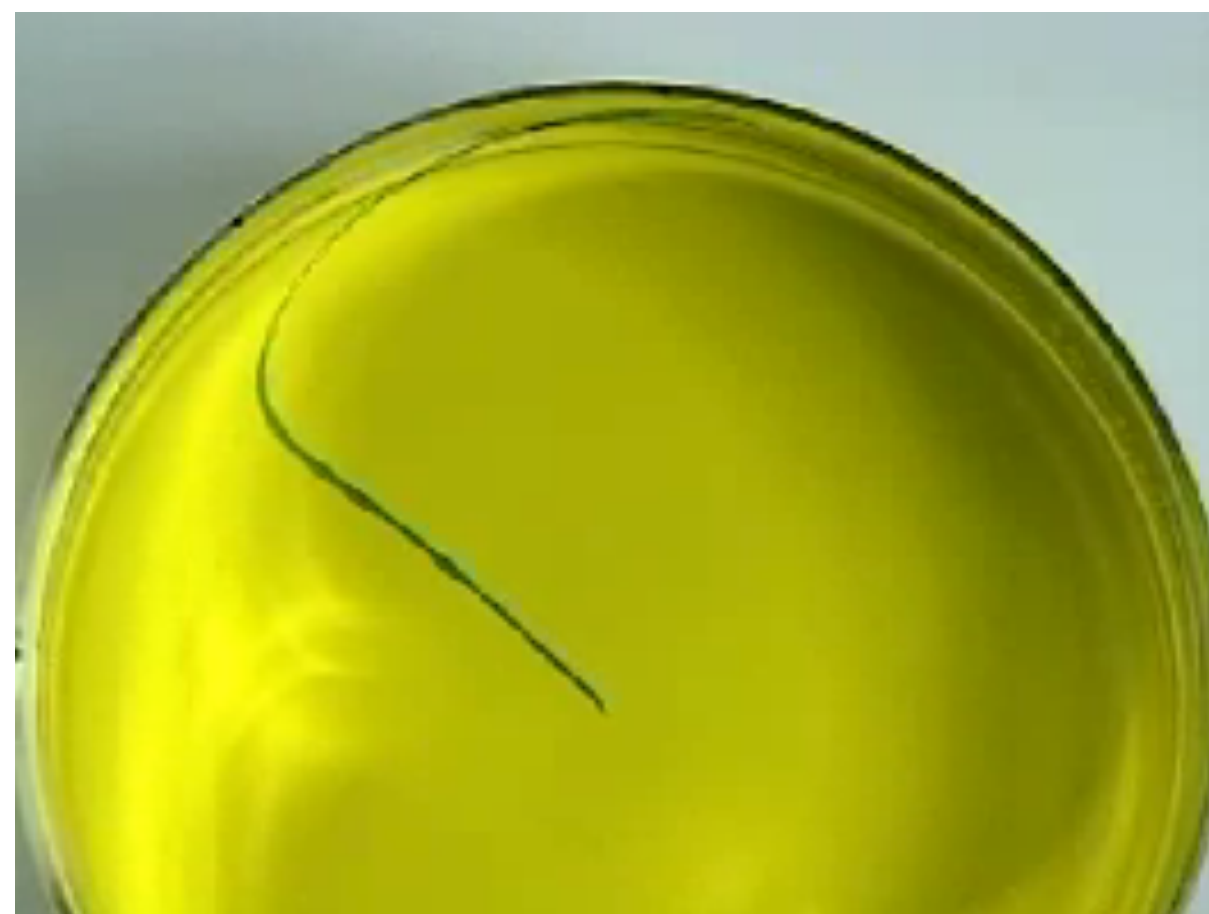
Démarrage d'une plaque plane



$$\delta = (\nu t)^{1/2}$$

épaisseur de couche limite

Spin-up



$$\nu = 10 \text{ cSt}$$



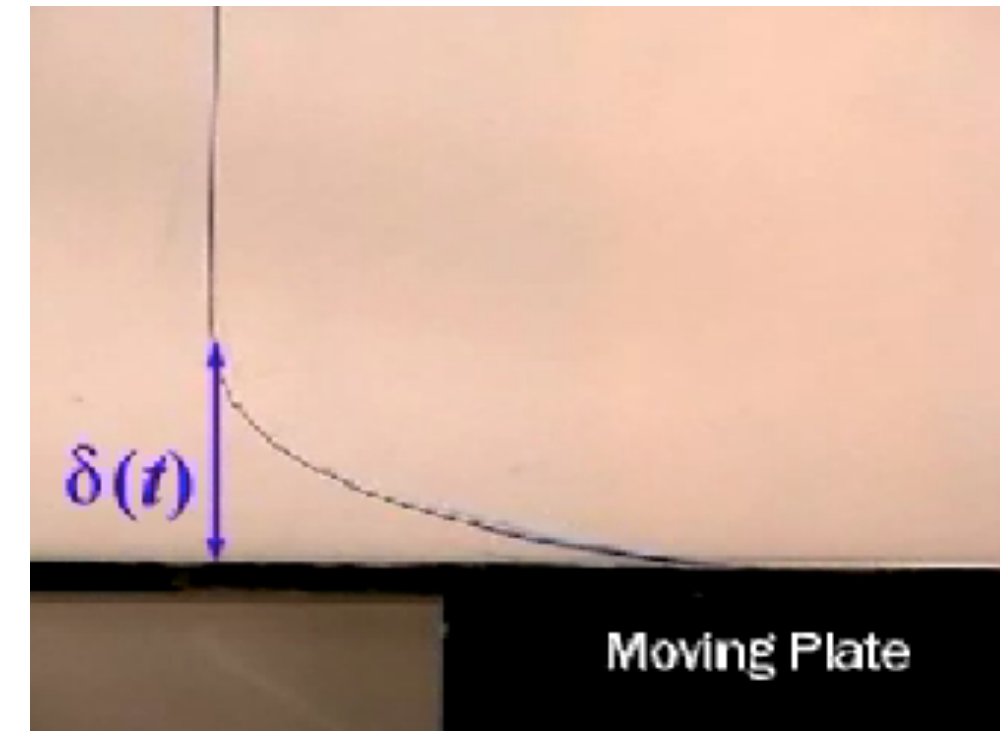
$$\nu = 100 \text{ cSt}$$



$$\nu = 10\,000 \text{ cSt}$$

Quelle est la contrainte tangentielle sur la plaque ?

$$\sigma_{xy}|_{y=0} = \eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)_{y=0}$$



Avant de la calculer précisément, on peut rapidement estimer son ordre de grandeur :

$$\sigma_{xy}|_{y=0} \sim \eta \frac{U}{\delta} \quad \text{avec } \delta = (\nu t)^{1/2} \text{ épaisseur de couche limite}$$

$$\sigma_{xy}|_{y=0} \sim \eta \frac{U}{(\nu t)^{1/2}}$$

$$\sigma_{xy}|_{y=0} \sim \rho^{1/2} \eta^{1/2} U t^{-1/2}$$

Cette contrainte décroît au cours du temps

La contrainte tangentielle sur la plaque est précisément

$$\sigma_{xy}|_{y=0} = \eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)_{y=0}$$

$$\sigma_{xy}|_{y=0} = \eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)_{y=0} \quad \text{avec} \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{1}{(\nu t)^{1/2}}$$

$$\sigma_{xy}|_{y=0} = \eta \frac{1}{(\nu t)^{1/2}} \left(\frac{\partial u_x}{\partial \xi} \right)_{y=0} \quad \text{avec} \quad \frac{\partial u_x}{\partial \xi} = -\frac{2U}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi^2}$$

$$\sigma_{xy}|_{y=0} = -\eta \frac{1}{(\nu t)^{1/2}} \frac{2U}{\sqrt{\pi}}$$

$$\sigma_{xy}|_{y=0} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \rho^{1/2} \eta^{1/2} U t^{-1/2}$$

Cette contrainte décroît au cours du temps

