Université Paris-Saclay, Faculté des Sciences d'Orsay, M1 MFL - M1 PA - M2 PIE

Examen Mécanique des Fluides : Corrigé

8 novembre 2024

Durée : 3 heures - Sans document sauf une feuille manuscrite A4 recto-verso
Les exercices 2 et 3 sont à aborder de préférence après l'exercice 1. L'exercice 4 est indépendant.

1 Écoulement Laminaire entre Deux Plaques

On considère un écoulement laminaire d'un fluide incompressible de viscosité dynamique μ et de densité ρ entre deux plaques planes parallèles séparées par une distance $2h$. Cet écoulement suivant x est induit par à une différence de pression $\Delta P = P_0 - P_L$ entre les points d'entrée et de sortie distants de la longueur L. On considère l'écoulement stationnaire et bidimensionnel dans le plan (x, y) où y est la direction perpendiculaire aux plaques.

1. Ecrire les équations du problème et discuter les symétries. Indiquer les conditions limites.

   Réponse:
   Voire cours

2. Résoudre le problème et trouver le profil de vitesse $u_x(y)$. Dessiner l'allure de ce profil suivant y.

   Réponse:
   Voire cours.

$$u_(x) = \frac{\Delta P}{2\mu L} y(y - 2h)$$

3. Calculer le débit volumique Q (débit par unité de largeur suivant z) et faire l'allure du profil de pression suivant x.

   Réponse:
   Voire cours

2 Écoulement Laminaire entre Deux Plaques avec Rugosité des Parois

On considère maintenant le même écoulement laminaire incompressible suivant x entre deux plaques planes horizontales, séparées par une distance $2h$. Les plaques sont parallèles et fixes, mais elles possèdent une certaine rugosité.

1. Approximation de la rugosité : En tenant compte de la hauteur de la rugosité k_s, on considérera que l'épaisseur effective d'écoulement devient $2h - k_s$ au lieu de $2h$. Exprimez cette approximation en termes de conditions aux limites pour la vitesse u_x dans la section de l'écoulement, sachant que u_x reste nul dans les zones de rugosité.

2. Profil de vitesse : En appliquant l'équation de Navier-Stokes en régime permanent et en utilisant les conditions aux limites modifiées, trouvez le profil de vitesse $u_x(y)$ entre les plaques en fonction de y, x, h, k_s, μ et du gradient de pression $\frac{dP}{dx}$.

3. Débit Volumique : Calculez le débit volumique Q (par unité de largeur suivant z) à travers la section x en intégrant le profil de vitesse sur la hauteur effective d'écoulement.
4. Perte de Charge : Comparez le débit pour une surface lisse ($k = 0$) et une surface rugueuse ($k > 0$) en fonction des mêmes paramètres. Comment la rugosité affecte-t-elle le débit ?
5. Interprétation physique : Expliquez qualitativement comment la présence de rugosités influence la dissipation de l'énergie dans l'écoulement et son impact sur la perte de charge.

Réponse:

1. Approximation de la Rugosité

Lorsque la rugosité est présente, on considère qu'il existe une région près des parois, de hauteur k_s, dans laquelle la vitesse est nulle (les rugosités " bloquent" le mouvement du fluide dans ces régions). La distance effective dans laquelle le fluide circule librement est donc réduite à $2(h - k_s)$.

Les conditions aux limites pour la vitesse sont alors :

- $v_x = 0$ à $y = -h + k_s$ (paroi inférieure, hors zone de rugosité),
- $v_x = 0$ à $y = h - k_s$ (paroi supérieure, hors zone de rugosité).

2. Profil de Vitesse

En régime permanent et en supposant un écoulement faiblement parallèle, l'équation de Navier-Stokes dans la direction x donne :

$$\frac{dP}{dx} = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

En intégrant deux fois cette équation par rapport à y, on obtient :

$$v_x(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} y^2 + C_1 y + C_2$$

En appliquant les conditions aux limites $v_x = 0$ à $y = -h + k_s$ et $v_x = 0$ à $y = h - k_s$, on résout pour C_1 et C_2, ce qui donne :

$$v_x(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} \left(y^2 - (h - k_s)^2\right)$$

3. Débit Volumique

Le débit volumique Q est obtenu en intégrant $v_x(y)$ sur la hauteur effective d'écoulement $2(h - k_s)$:

$$Q = \int_{-h+k_s}^{h-k_s} v_x(y)\, dy$$

En substituant $v_x(y)$ et en intégrant, on trouve :

$$Q = -\frac{(h - k_s)^3}{3\mu} \frac{dP}{dx}$$

4. Perte de Charge

Pour un canal de longueur L et en supposant que $\Delta P = P_1 - P_2 = -\frac{dP}{dx} \cdot L$, on obtient l'expression de la perte de charge sous forme de gradient de pression en fonction du débit :

$$\Delta P = \frac{3\mu Q L}{(h - k_s)^3}$$

Comparaison avec le Cas sans Rugosité

Sans rugosité, la hauteur d'écoulement serait simplement $2h$, et le débit volumique pour une même différence de pression ΔP serait donné par :

$$Q_{\text{sans rugosité}} = \frac{h^3}{3\mu} \frac{\Delta P}{L}$$

La rugosité réduit donc le débit par un facteur $\left(\frac{h-k_s}{h}\right)^3$, et augmente la perte de charge pour un débit donné.

Discussion

Cet exercice montre comment la rugosité des parois réduit la section d'écoulement effective et augmente la résistance de l'écoulement, ce qui peut avoir un effet significatif dans les systèmes où la hauteur de l'écoulement est faible (comme dans les micro-canaux). L'impact de la rugosité dépend du rapport k_s/h, et pour des canaux de faible épaisseur, l'effet de la rugosité peut être particulièrement prononcé.

3 Écoulement dans une géométrie étroite sous approximation de lubrification

Un fluide visqueux incompressible de viscosité dynamique μ s'écoule dans la direction x entre deux plaques planes parallèles séparées par une distance $h(x)$, où x est la coordonnée horizontale (parallèle aux plaques). La hauteur entre les plaques $h(x)$ varie lentement selon x, ce qui justifie l'usage de l'approximation de lubrification. Le fluide est soumis à une différence de pression entre les points $x = 0$ et $x = L$. Le régime d'écoulement est toujours supposé stationnaire.

On pourra considérer que la distance entre les plaques varie suivant x : $h(x) = h_0(1 + \alpha x)$, avec α un paramètre constant de faible valeur ($\alpha \ll 1$).
L'écoulement est induit par une différence de pression $\Delta P = P_0 - P_L$ entre $x = 0$ et $x = L$, avec P_0 et P_L les pressions respectivement aux points $x = 0$ et $x = L$.

1. Équations de l'écoulement :
   (a) Écrivez les équations de conservation de la quantité de mouvement dans le cadre de l'approximation de lubrification, en justifiant les simplifications possibles sur la base de la géométrie de l'écoulement.
   (b) Exprimez la composante de vitesse u_x en fonction de x, y et des paramètres du problème.
2. Débit volumique : Intégrez la composante de vitesse u_x sur l'épaisseur $h(x)$ pour obtenir une expression du débit volumique par unité de largeur $Q(x)$ dans la section x. Simplifiez l'expression en utilisant l'approximation de lubrification.

3. Équation de conservation de débit : En utilisant la conservation du débit, trouvez une relation entre le gradient de pression $\frac{dP}{dx}$ et la géométrie de l'écoulement, soit $h(x)$.
4. Profil de pression : En intégrant l'équation obtenue pour le gradient de pression, déduisez l'expression du profil de pression $P(x)$ dans le canal en fonction des paramètres donnés.
5. Débit total : Déduisez l'expression du débit total Q dans le canal en fonction de ΔP, L, μ, h_0, et α.

Réponse:

(a) En supposant un écoulement faiblement parallèle, l'approximation de lubrification implique que les gradients de pression dominent le long de x (direction de l'écoulement), et que les gradients de vitesse en y (normal aux plaques) sont importants. Ainsi, on peut négliger $\frac{\partial}{\partial x}$ dans les équations pour y, en écrivant la composante x de l'équation de Navier-Stokes :

$$\frac{dP}{dx} = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

(b) En intégrant deux fois par rapport à y pour résoudre cette équation, on obtient :

$$v_x(y) = \frac{1}{2\mu}\frac{dP}{dx}y^2 + C_1 y + C_2$$

Les conditions aux limites sont :

- $v_x = 0$ à $y = 0$ (paroi inférieure),
- $v_x = 0$ à $y = h(x)$ (paroi supérieure).

En imposant ces conditions, on trouve que $C_1 = 0$ et $C_2 = 0$, ce qui donne :

$$v_x(y) = \frac{1}{2\mu}\frac{dP}{dx}\left(y^2 - yh(x)\right)$$

2. Débit volumique

Le débit volumique $Q(x)$ est obtenu en intégrant v_x sur la hauteur $h(x)$:

$$Q(x) = \int_0^{h(x)} v_x(y)\,dy = \int_0^{h(x)} \frac{1}{2\mu}\frac{dP}{dx}\left(y^2 - yh(x)\right)\,dy$$

En intégrant, on obtient :

$$Q(x) = -\frac{h(x)^3}{12\mu}\frac{dP}{dx}$$

3. Équation de conservation de débit

En régime stationnaire, le débit $Q(x)$ est constant le long de x, donc on a :

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{h(x)^3}{12\mu}\frac{dP}{dx}\right) = 0$$

Cela implique que :

$$\frac{d}{dx}\left(h(x)^3\frac{dP}{dx}\right) = 0$$

4. Profil de pression

En intégrant par rapport à x, on obtient :

$$h(x)^3 \frac{dP}{dx} = \text{constant} = \frac{h_0^3 \Delta P}{L}$$

Ainsi,

$$\frac{dP}{dx} = \frac{\Delta P}{L} \frac{h_0^3}{h(x)^3}$$

En intégrant une nouvelle fois pour obtenir $P(x)$, avec $P(0) = P_0$, on obtient le profil de pression dans le canal.

5. Débit total

En utilisant l'expression de $Q(x)$ obtenue dans la question précédente et en évaluant pour $x = 0$, le débit total est donné par :

$$Q = -\frac{h_0^3}{12\mu} \frac{\Delta P}{L}$$

Examen MCC Mécanique des Fluides

- Jet sortant d'un réservoir par un orifice

1) pression hydrostatique hors de l'orifice :

$$\vec{\nabla} p = \rho \vec{g} \iff \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \qquad p(z=h) = p_0$$

$$p(z) = C - \rho g z$$

$$\Rightarrow \boxed{p(z) = p_0 - \rho g (z-h)}$$

La vitesse dans le réservoir est de l'ordre $v_f \left(\frac{d_f}{L}\right)^2$ (conservation de la masse)

$v_f \left(\frac{d_f}{L}\right)^2 \ll 1$ car $d_f \ll L$ $\Rightarrow$ approximation hydrostatique

2) pression dans le jet $= p_0$ car $d_f \ll 1$

3) $$\frac{d}{dt}\iiint \rho \vec{v}\, d\tau = -\oiint p\, d\vec{S} + \iiint \rho \vec{g}\, d\tau$$

$$\cancel{\iiint \frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v})\, d\tau} + \iint_S \rho \vec{v} (\vec{v}\cdot d\vec{S}) = -\oiint p\, d\vec{S} + \iiint \rho \vec{g}\, d\tau$$

on projette selon x :

$$\iint \rho v_x (\vec{v}\cdot d\vec{S}) = -\iint p\, d\vec{S}\cdot \vec{e_x}$$

sur AB, BC, HI : pression hydrostatique

$$-\iint_{AB} p\, d\vec{S}\cdot\vec{e_x} \quad -\iint_{BC-HI} p\, d\vec{S}\cdot\vec{e_x} = 0$$

$$\Rightarrow -\iint p\, d\vec{S}\cdot\vec{e_x} = -\iint_{DG} (p_0 + \rho g h)(-dS_{DG}\, \vec{e_x})\cdot\vec{e_x} - \iint_{EF} p_0 (dS_{EF}\, \vec{e_x})\cdot\vec{e_x}$$

$$= (\cancel{p_0} + \rho g h)\frac{\pi d_0^2}{4} - \cancel{p_0 \frac{\pi d_0^2}{4}}$$

$$\iint \rho v_x (\vec{v}\cdot d\vec{S}) = \rho v_f^2 \frac{\pi d_f^2}{4} = \rho g h \frac{\pi d_0^2}{4} \Rightarrow v_f^2 d_f^2 = g h d_0^2$$

on projette selon z : $\quad v_{AB} \ll 1$

$$-\oiint p\, d\vec{S}\cdot\vec{e_z} + \iiint -\rho g\, d\tau = 0 \qquad -\iint p\, d\vec{S}\cdot\vec{e_z} = -\iint_{IJ} p(-dS\vec{e_z})\cdot\vec{e_z}$$

$\Rightarrow$ La pression compense le poids en IJ

Sur une ligne de courant reliant AB à EF :

$$\cancel{\tfrac{1}{2}\rho v_{AB}^2} + \cancel{p_0} + \rho g h = \tfrac{1}{2}\rho v_f^2 + \cancel{p_0} + \rho g (0)$$

$$v_f = \sqrt{2gh}$$

or $v_f^2 d_f^2 = g h d_0^2 \Rightarrow (\sqrt{2gh})^2 d_f^2 = g h d_0^2 \qquad d_f = \frac{d_0}{\sqrt{2}}$

et $V_0 d_0^2 = V_f d_f^2 \qquad v_0 = v_f \left(\frac{d_f}{d_0}\right)^2 = \frac{v_f}{2}$