Université Paris-Saclay, Faculté des Sciences d'Orsay, M1 MFL - M1 PA - M2 PIE

Examen Mécanique des Fluides

8 novembre 2024

1 Écoulement Laminaire entre Deux Plaques

On considère un écoulement laminaire d'un fluide incompressible de viscosité dynamique μ et de densité ρ entre deux plaques planes parallèles séparées par une distance $2h$. Cet écoulement est soumis à une différence de pression $\Delta P = P_0 - P_L$ entre les points d'entrée et de sortie. On considère le problème stationnaire et plan.

Les données du problème sont les suivantes : Viscosité dynamique du fluide : μ ; Débit volumique : Q ; Largeur des plaques : L ; Distance entre les plaques : $2h$.

1. Ecrire les équations du problème et discuter les symétries. Indiquer les conditions limites.
2. Résoudre le problème et trouver le profil de u_x.
3. Calculer le débit volumique Q et faire un graphe du profil de pression.

2 Écoulement Laminaire entre Deux Plaques avec Rugosité des Parois

On considère maintenant le même écoulement laminaire incompressible entre deux plaques planes horizontales, séparées par une distance $2h$. Les plaques sont parallèles et fixes, mais elles possèdent une certaine rugosité. Cette rugosité est modélisée par une rugosité caractéristique k_s qui modifie la distribution de la vitesse du fluide entre les plaques.

1. Approximation de la rugosité : En tenant compte de la hauteur de la rugosité k_s, on peut considérer que l'épaisseur effective d'écoulement devient $2h - k_s$ au lieu de $2h$. Exprimez cette approximation en termes de conditions aux limites pour la vitesse u_x dans la section de l'écoulement, sachant que u_x reste nul dans les zones de rugosité.
2. Profil de vitesse : En appliquant l'équation de Navier-Stokes en régime permanent et en utilisant les conditions aux limites modifiées, trouvez le profil de vitesse $u_x(y)$ entre les plaques en fonction de y, x, h, k_s, μ et du gradient de pression $\frac{dP}{dx}$.
3. Débit Volumique : Calculez le débit volumique Q à travers la section x en intégrant le profil de vitesse sur la hauteur effective d'écoulement.
4. Perte de Charge : Comparez le débit pour une surface lisse ($k = 0$) et une surface rugueuse ($k > 0$) en fonction des mêmes paramètres. Comment la rugosité affecte-t-elle le débit ?
5. Interprétation physique : Expliquez qualitativement comment la présence de la rugosité influence la dissipation de l'énergie dans l'écoulement et son impact sur la perte de charge.

3 Écoulement dans une géométrie étroite sous approximation de lubrification

Un fluide visqueux incompressible de viscosité dynamique μ s'écoule entre deux plaques planes parallèles séparées par une distance $h(x)$, où x est la coordonnée horizontale (parallèle aux plaques). La hauteur entre les plaques $h(x)$ varie lentement selon x, ce qui justifie l'usage de l'approximation de lubrification. Le fluide est soumis à une différence de pression entre les points $x = 0$ et $x = L$. Nous considérons le régime stationnaire.

On pourra considérer que la distance entre les plaques varie suivant x : $h(x) = h_0(1 + \alpha x)$, avec α un paramètre constant de faible valeur.
Le fluide subit une différence de pression $\Delta P = P_0 - P_L$ entre $x = 0$ et $x = L$, avec P_0 et P_L les pressions respectivement aux points $x = 0$ et $x = L$.

1. Équations de l'écoulement :
   (a) Écrivez les équations de conservation de la quantité de mouvement dans le cadre de l'approximation de lubrification, en justifiant les simplifications possibles sur la base de la géométrie de l'écoulement.
   (b) Exprimez la composante de vitesse u_x (la vitesse en direction x) en fonction de x, y et des paramètres du problème.
2. Débit volumique : Intégrez la composante de vitesse u_x sur l'épaisseur $h(x)$ pour obtenir une expression du débit volumique $Q(x)$ dans la section x. Simplifiez l'expression en utilisant l'approximation de lubrification.
3. Équation de conservation de débit : En utilisant la conservation du débit, trouvez une relation entre le gradient de pression $\frac{dP}{dx}$ et la géométrie de l'écoulement, soit $h(x)$.
4. Profil de pression : En intégrant l'équation obtenue pour le gradient de pression, déduisez l'expression du profil de pression $P(x)$ dans le canal en fonction des paramètres donnés.
5. Débit total : Déduisez l'expression du débit total Q dans le canal en fonction de ΔP, L, μ, h_0, et α.

4 Jet sortant d'un réservoir par un orifice

On considère un réservoir parallélépipédique, de base carrée de côté L, percé sur une paroi latérale d'un petit orifice de diamètre d_0 muni d'un tube rentrant, appelé ajutage de Borda (figure 1). Ce réservoir est rempli d'un liquide de masse volumique ρ dans le champs de gravité verticale g. On note h la distance verticale entre la surface libre et l'orifice. On s'intéresse ici au diamètre final du jet d_f et à sa vitesse V_f, en supposant que l'écoulement est de type fluide parfait et sans problème de tension de surface. On considère la surface de contrôle S délimitée par les points A...J. Les surfaces désignées par BCD et GHIJA sont en contact avec la paroi. La surface DEFG correspond à un cylindre de diamètre d_0 dont la paroi latérale (DE et FG) est dans l'air à la pression atmosphérique p_0. Le diamètre final du jet d_f est inférieur au diamètre EF = FG = d_0 du cylindre.

1. Justifier du fait qu'on peut appliquer la loi de l'hydrostatique en tout point du réservoir en dehors de l'orifice. En déduire la pression $p(z)$ dans le liquide avec $z = 0$ placé au niveau de l'orifice.

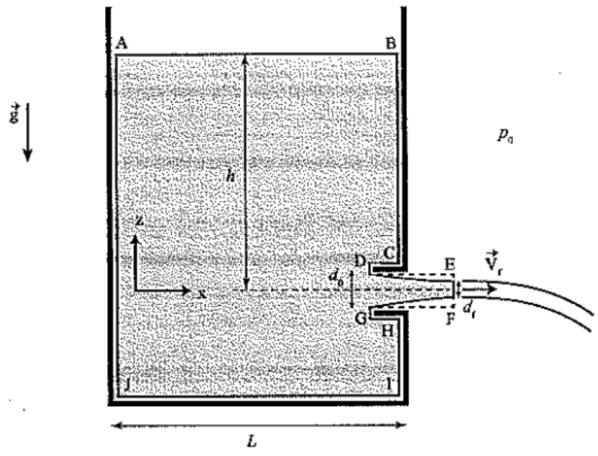

Figure 1: Schéma du réservoir percé de son orifice

2. Justifier le fait qu'on puisse considérer la pression dans le jet égale à la pression atmosphérique p_0.
3. Par l'écriture du bilan de la quantité de mouvement sur le volume de contrôle délimité par S, montrer que la projection de ce bilan suivant l'axe x s'écrit $d_f^2 V_f^2 = ghd_0^2$.
4. Que pensez-vous de la projection de ce bilan suivant l'axe z ?
5. En se plaçant le long d'une ligne de courant reliant un point de la surface libre AB à un point de la section de diamètre d_f, exprimer la vitesse V_f. En déduire la relation entre d_f et d_0. En déduire la relation entre V_f et V_0. Commenter.