

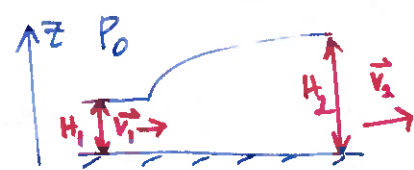
Équations de continuité

TD M1 PA
16/09/15

Ressaut hydraulique dans un canal

→ apparition d'un brouillard d'eau de forme circulaire au fond d'un évier de lequel coule l'eau d'un robinet.

Le ressaut sépare une zone centrale d'épaisseur de fluide faible d'une région périphérique où la hauteur du fluide est plus importante.



Limite entre les 2 : passage de la vitesse de l'écoulement $U(x)$ d'une valeur $>$ à la vitesse locale des ondes de surface à une valeur $<$.
 $c = \sqrt{gh}$ ondes de gravité
 $h \uparrow$, vitesse fluide v , $c \uparrow$

- À plus gde échelle :
- des les déversoirs en aval des barrages
 - les vagues déferlantes : ressaut mobile qui se déplace à la vitesse de la zone de déferlement
 - mascaret qui apparaît à la rencontre d'un fleuve et de la marée montante

on caractérise le ressaut avec le Froude :

$$Fr = \frac{U(x)}{\sqrt{gh(x)}}$$

vitesse du fluide / vitesse des ondes

analogie avec ondes de choc près d'un avion supersonique

$Ma > 1$ | $Ma < 1$

$Ma = \frac{U(x)}{c}$

choc

Étant donné configuration, forte dissipation d'énergie au niveau du ressaut
 → pas Bernoulli mais équations de conservation.

1) Le gradient de pression n'est pas le moteur de l'écoulement → on considère une pression hydrostatique.

$$\vec{\nabla} p = \rho \vec{g} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad \Leftrightarrow \quad p(z) = -\rho g z + C$$

$\int p(h_1) = P_0 \quad \Leftrightarrow \quad p_1(z) = P_0 + \rho g (h_1 - z)$

$\int p(h_2) = P_0 \quad \Leftrightarrow \quad p_2(z) = P_0 + \rho g (h_2 - z)$

Δ de pression entre l'amont et l'aval du ressaut

$\Delta P = \rho g (h_2 - h_1)$
 Pression non constante le long d'une ldc → pas Bernoulli car dissipation au niveau du ressaut

2) Équation de conservation de la masse :

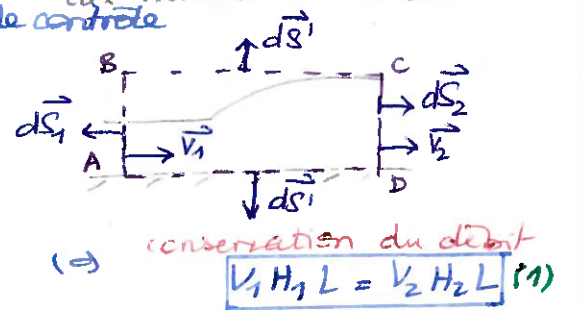
soit le volume de contrôle ABCD et la surface de contrôle

$$\frac{d}{dt} \iiint_{ABCD} \rho d\tau = \iiint_{ABCD} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau + \oint_{ABCD} \rho \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0$$

stationnaire

$$0 = \oint_{AB} \rho \vec{v} \cdot d\vec{s} + \oint_{BC} \rho \vec{v} \cdot d\vec{s} + \oint_{CD} \rho \vec{v} \cdot d\vec{s} + \oint_{DA} \rho \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

$$\Leftrightarrow 0 = -\rho_1 v_1 H_1 + 0 + \rho_2 v_2 H_2 + 0$$



③ Equation de transport de la quantité de mouvement $\Rightarrow$ itère selon x

$$\frac{d}{dt} \iiint_{ABCD} \rho v_x d\tau = \iiint_{ABCD} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_x) d\tau + \oint_{ABCD} \rho v_x (\vec{v} \cdot d\vec{S})$$

$$\underbrace{\Sigma \text{ forces appliquées}} = \left(\underbrace{- \oint_{ABCD} p d\vec{S}}_{\text{forces de pression}} + \underbrace{\oint_{ABCD} \vec{S}' \cdot d\vec{S}}_{\text{non visqueux}} + \underbrace{\oint_{ABCD} \rho \vec{g} d\tau}_{\text{non pesant}} \right) \cdot \vec{e}_x$$

$$\begin{aligned} \oint_{ABCD} \rho v_x (\vec{v} \cdot d\vec{S}) &= \oint_{AB} \rho v_1 (v_1 \vec{e}_x \cdot (-S_1) \vec{e}_x) + \cancel{\oint_{BC} \rho v_x (v_x \cdot d\vec{S})} + \oint_{CD} \rho v_2 (v_2 \vec{e}_x \cdot S_2 \vec{e}_x) \\ &\quad + \cancel{\oint_{DA} \rho v_x (v_x \cdot d\vec{S})} \\ &= -\rho v_1^2 H_1 L + \rho v_2^2 H_2 L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \oint_{ABCD} p d\vec{S} \cdot \vec{e}_x &= - \int_0^{H_1} p_1(z) L dz - \int_{H_1}^{H_2} p_1(z) L dz + \int_0^{H_2} p_2(z) L dz \\ &= - \int_0^{H_1} [p_0 + \rho g (H_1 - z)] L dz - \int_{H_1}^{H_2} p_0 L dz + \int_0^{H_2} [p_0 + \rho g (H_2 - z)] L dz \\ &= \left(-\cancel{p_0 H_1} - \rho g H_1^2 + \frac{1}{2} \rho g H_1^2 - \cancel{p_0 H_2} + \cancel{p_0 H_1} + \cancel{p_0 H_2} + \rho g H_2^2 - \frac{1}{2} \rho g H_2^2 \right) L \\ &= \frac{1}{2} \rho g (H_2^2 - H_1^2) L \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -\cancel{\rho v_1^2 H_1 L} + \cancel{\rho v_2^2 H_2 L} = \frac{1}{2} \rho g (H_1^2 - H_2^2) L$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} \rho g H_1^2 + \rho v_1^2 H_1 = \frac{1}{2} \rho g H_2^2 + \rho v_2^2 H_2} \quad (2)$$

1) $v_2 = v_1 \frac{H_1}{H_2}$ dans (2)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \rho g H_1^2 + \rho v_1^2 H_1 &= \frac{1}{2} \rho g H_2^2 + \rho v_1^2 \frac{H_1^2}{H_2} \\ \rho v_1^2 H_1 \left(1 - \frac{H_1}{H_2} \right) &= \frac{1}{2} \rho g (H_2^2 - H_1^2) \end{aligned}$$

$$v_1^2 \frac{H_1}{H_2} (H_2 - H_1) = \frac{1}{2} g (H_2 + H_1) (H_2 - H_1)$$

$$v_1^2 = \frac{1}{2} g \frac{H_2}{H_1} (H_2 + H_1)$$

$$\boxed{v_1 = \sqrt{\frac{1}{2} g \frac{H_2}{H_1} (H_2 + H_1)}}$$

1) $v_1 = v_2 \frac{H_2}{H_1}$ dans (2)

$$\frac{1}{2} \rho g H_1^2 + \rho v_2^2 \frac{H_2^2}{H_1} = \frac{1}{2} \rho g H_2^2 + \rho v_2^2 H_2$$

$$v_2^2 H_2 \left(1 - \frac{H_2}{H_1} \right) = \frac{1}{2} g (H_1^2 - H_2^2)$$

$$v_2^2 \frac{H_2}{H_1} (H_1 - H_2) = \frac{1}{2} g (H_1 + H_2) (H_1 - H_2)$$

$$\boxed{v_2 = \sqrt{\frac{1}{2} g \frac{H_1}{H_2} (H_2 + H_1)}}$$

on pose $\alpha = \frac{H_2}{H_1}$

$$\begin{cases} V_1^2 = \frac{1}{2} g \frac{H_2}{H_1} H_1 \left(\frac{H_2}{H_1} + 1 \right) = \frac{1}{2} g H_1 \alpha (\alpha + 1) \\ V_2^2 = \frac{1}{2} g \frac{H_1}{H_2} H_2 \left(1 + \frac{H_1}{H_2} \right) = \frac{1}{2} g H_2 \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} + 1 \right) \end{cases}$$

Applications
numériques:

$$H_2 V_2 = H_1 V_1 = 1,5 \text{ m}^2/\text{s}$$

$$H_1 = 0,2 \text{ m}$$

$$V_1 = \frac{Q_v}{H_1} = 7,5 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow Fr_1 = \frac{V_1}{\sqrt{g H_1}} = 5,35$$

$$\Rightarrow \alpha = 7,08$$

$$\Rightarrow H_2 = \alpha \times H_1 = 1,42 \text{ m}$$

$$\Rightarrow V_2 = \frac{Q_v}{H_2} = 1,05 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow Fr_2 = \frac{V_2}{\sqrt{g H_2}} = 0,284$$

$$\begin{cases} Fr_1^2 = \frac{V_1^2}{g H_1} = \frac{1}{2} \alpha (\alpha + 1) \\ Fr_2^2 = \frac{V_2^2}{g H_2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} + 1 \right) \end{cases}$$

si on voulait calculer α en fonction de Fr_1 :

on a l'équation du second degré:

$$\alpha^2 + \alpha - 2 Fr_1^2 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8 Fr_1^2}}{2} \quad \text{or } \alpha > 0$$

$$\text{donc } \alpha = \frac{\sqrt{1 + 8 Fr_1^2} - 1}{2}$$

si $\alpha > 1 \rightarrow Fr_1 > 1$ en amont

$Fr_2 < 1$ en aval

$$\alpha > 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \alpha (\alpha + 1) > 1$$

$\Downarrow$

$$\frac{1}{\alpha} < 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} + 1 \right) < 1$$

④ Bilan énergétique

on a le théorème de transport pour la densité d'énergie $e = \rho \left(\frac{V^2}{2} + g z \right)$ $\frac{\text{J}}{\text{m}^3}$

$$\frac{dE}{dt} = \iint_{\text{reco}} \frac{\partial E}{\partial t} d\sigma + \iint_{\text{reco}} e \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

puissance

$$= - \iint_{\text{reco}} p \vec{v} \cdot d\vec{s} - \dot{Q}$$

puissance fournie
par le travail des
forces de pression

puissance dissipée
sous forme
de chaleur
de reco

$$\Rightarrow \boxed{-\dot{Q} = \iint_{\text{reco}} \rho \left(\frac{V^2}{2} + g z + \frac{p}{\rho} \right) \vec{v} \cdot d\vec{s}}$$

$$-\frac{\dot{Q}}{\rho} = \int_0^{H_2} \left[\frac{V_2^2}{2} + g z + \frac{P_0}{\rho} + g (H_2 - z) \right] V_2 L dz - \int_0^{H_1} \left[\frac{V_1^2}{2} + g z + \frac{P_0}{\rho} + g (H_1 - z) \right] V_1 L dz$$

$$- \int_{H_1}^{H_2} \frac{\rho g V_1 L}{\rho} dz \quad V_{\text{air}} = 0$$

$$V_2 H_2 = V_1 H_1$$

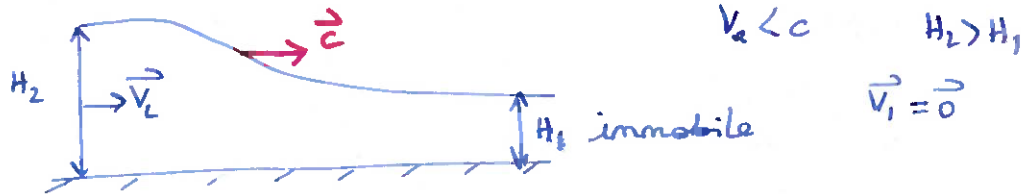
$$-\frac{\dot{Q}}{\rho L} = \frac{V_2^3}{2} H_2 + g \frac{V_2 H_2^2}{2} + \frac{P_0 V_2 H_2}{\rho} + g V_2 H_2^2 - \frac{1}{2} g V_2 H_2^2 - \frac{V_1^3}{2} H_1 - g \frac{V_1 H_1^2}{2} - \frac{P_0 V_1 H_1}{\rho} - g V_1 H_1^2 + \frac{1}{2} g V_1 H_1^2$$

$$-\frac{\dot{Q}}{\rho L} = \frac{V_2 H_2}{\rho} \left(\frac{V_2^2}{2} + g H_2 \right) - \frac{V_1 H_1}{\rho} \left(\frac{V_1^2}{2} + g H_1 \right)$$

Application numérique :

$$\begin{aligned}
 H_1 &= 0,2 \text{ m} & D_v &= 1,5 \text{ m}^3/\text{s} & L &= 1 \text{ m} \\
 V_1 &= 7,5 \text{ m/s} & V_2 &= 1,06 \text{ m/s} & \dot{Q} &= \rho L D_v \left[\left(\frac{V_1^2}{2} + g H_1 \right) - \left(\frac{V_2^2}{2} + g H_2 \right) \right] \\
 \dot{Q} &= \dot{m} C_p \Delta T = \rho D_v C_p \Delta T & \dot{Q} &= 23 \text{ kW} & C_p &= 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \\
 \Delta T &= \frac{\dot{Q}}{\rho D_v C_p} = 3 \text{ mK}
 \end{aligned}$$

⑤ Vitesse de propagation d'un mascaret

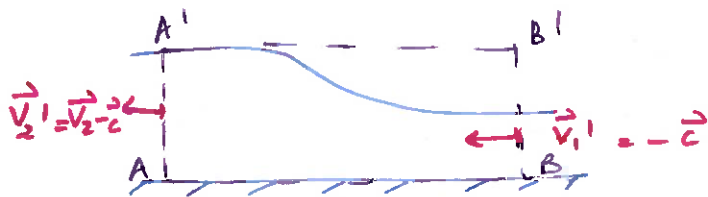


$$V_2 < c$$

$$H_2 > H_1$$

$$\vec{V}_1 = \vec{0}$$

Dans le référentiel de la vague :



vitesse de propagation du front d'onde / de la discontinuité :

$$V_1'^2 = c^2 = \frac{1}{2} g \frac{H_2}{H_1} (H_1 + H_2)$$

$$c = \sqrt{\frac{1}{2} g \frac{H_2}{H_1} (H_1 + H_2)}$$

cas limite : $\frac{H_2}{H_1} = 1 + \epsilon \quad \epsilon \rightarrow 0$

$$c^2 = \frac{1}{2} g (1 + \epsilon) H_1 (2 + \epsilon)$$

si $\epsilon \rightarrow 0 \quad c^2 \rightarrow g H_1$ c'est la vitesse des ondes de surface en eaux peu profondes.