

TD n°1 : ANALYSE DIMENSIONNELLE

1 - Force exercée par un fluide visqueux sur une sphère

1) $[F] = MLT^{-2}$ $[d] = L$ $[v] = LT^{-1}$ $[\mu] = ML^{-1}T^{-1}$

2) 4 grandeurs physiques $k=4$
 3 dimensions $r=3$ } $k-r=1$ paramètre sans dimension

3) $\pi = F d^\alpha v^\beta \mu^\gamma$ $[\pi] = \emptyset$

$$\pi = MLT^{-2} L^\alpha L^\beta T^{-\beta} M^\gamma L^{-\gamma} T^{-\gamma}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + 0 + 0 + \gamma = 0 \\ 1 + \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ -2 + 0 - \beta - \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = -1 \\ \alpha + \beta = -2 \\ \beta = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = -1 \\ \alpha = -1 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

donc $\pi = \frac{F}{dv\mu} \rightarrow F \propto \mu dv$

$F \propto n \mu dv$ où $n = \text{constante}$; coefficient numérique
 $\frac{F}{\mu dv} = \text{cte}$ $\frac{F}{\mu} = \text{cte}$ $\frac{F}{dv} = \text{cte}$

4) La loi de Stokes s'écrit $F = 3\pi\mu dv$.

Pas surprenant: si F est un produit de puissances des grandeurs dimensionnelles caractéristiques du pb, alors la contrainte dimensionnelle impose la relation établie.

Seul le facteur numérique reste indéterminé.

5) Si on prend aussi en compte la masse volumique:

$[\rho] = ML^{-3}$ $\rightarrow k-r = 5-3 = 2$ paramètres sans dimension

$\pi_1 = F d^{\alpha_1} v^{\beta_1} \mu^{\gamma_1} \rho^{\Delta_1}$ $\pi_2 = \rho d^{\alpha_2} v^{\beta_2} \mu^{\gamma_2} F^{\Delta_2}$

$\downarrow$
 $\pi_1 = \frac{F}{dv\mu}$

$\downarrow$
 $\begin{cases} 1 + 0 + 0 + \gamma_2 = 0 \\ -3 + \alpha_2 + \beta_2 - \gamma_2 = 0 \\ 0 + 0 - \beta_2 - \gamma_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_2 = -1 \\ \alpha_2 = 1 \\ \beta_2 = 1 \end{cases}$

$\pi_2 = \frac{\rho dv}{\mu} \rightarrow \text{Reynolds basé sur le diamètre de la sphère}$

$$\pi_1 = f(\pi_2)$$

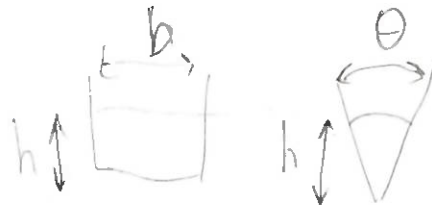
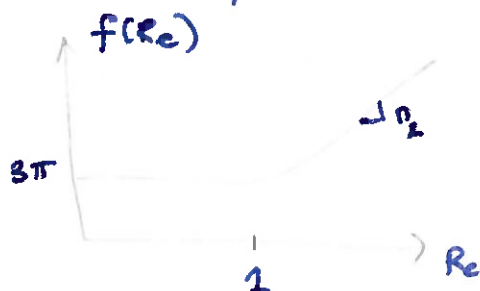
$$\frac{F}{\mu dV} = f(Re)$$

$$F = f(Re) \mu dV$$

$$\frac{F}{\mu dV} = 3\pi \text{ pour } Re < 1 \quad \frac{F}{\mu dV} = 0,7 Re \text{ pour } Re > 1$$

$$\text{si } \frac{F}{\mu dV} = \eta_2 \frac{\int dV}{\mu} \text{ pour } Re \gg 1 \rightarrow F = \eta_2 \int d^2 V^2$$

$\eta_2 = 0,7$ pour une sphère



2 - Débit d'un déversoir

$$1) [Q] = L^3 T^{-1} \quad [h] = L \quad [b] = L \quad [g] = L T^{-2}$$

$$2) \left. \begin{array}{l} k = 4 \text{ grandeurs physiques} \\ r = 2 \text{ dimensions} \end{array} \right\} k - r = 2 \text{ paramètres sans dimension}$$

3) on se fixe par exemple Q et b comme paramètres indépendants.

$$4) \pi_1 = Q h^{\alpha_1} g^{\gamma_1}$$

$$\pi_2 = b h^{\alpha_2} g^{\gamma_2}$$

$$\begin{cases} 3 + \alpha_1 + \gamma_1 = 0 \\ -1 + 0 + 2\gamma_1 = 0 \end{cases}$$

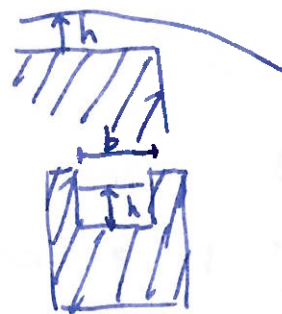
$$\begin{cases} 1 + \alpha_2 + \gamma_2 = 0 \\ 0 + 0 - 2\gamma_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = -5/2 \\ \gamma_1 = -1/2 \end{cases}$$

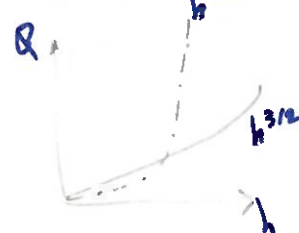
$$\begin{cases} \alpha_2 = -1 \\ \gamma_2 = 0 \end{cases}$$

$$\pi_1 = \frac{Q}{(gh^5)^{1/2}}$$

$$\pi_2 = \frac{b}{h} \rightarrow \text{rapport d'aspect}$$



$$5) \pi_1 = \Phi(\pi_2) \quad \text{si } \pi_1 = n \pi_2 \rightarrow Q = k b (gh^3)^{1/2}$$



6) Pour un déversoir triangulaire, $k=3$, $r=2$ } $k-r=1$ $\pi = Q h^{\alpha} g^{\gamma}$ b n'intervient plus mais θ sans dim.
 $Q = k g^{1/2} h^{5/2} f(\theta)$



7) on prend en compte la masse volumique du fluide ρ et viscosité η

$$[\rho] = \text{ML}^{-3} \quad [\eta] = \text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}$$

rectangulaire : $k = 6 \quad r = 3 \quad k - r = 3$

$$\pi_1 = Q h^{\alpha_1} g^{\beta_1} \eta^{\gamma_1}$$

$$\pi_2 = b h^{\alpha_2} g^{\beta_2} \eta^{\gamma_2}$$

$$\pi_3 = \rho h^{\alpha_3} g^{\beta_3} \eta^{\gamma_3}$$

$$\begin{cases} 3 + \alpha_1 + \beta_1 - \gamma_1 = 0 \\ -1 + 0 - 2\beta_1 - \gamma_1 = 0 \\ 0 + 0 + 0 + \gamma_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \alpha_2 + \beta_2 - \gamma_2 = 0 \\ 0 + 0 - 2\beta_2 - \gamma_2 = 0 \\ 0 + 0 + 0 + \gamma_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 + \alpha_3 + \beta_3 - \gamma_3 = 0 \\ 0 + 0 - 2\beta_3 - \gamma_3 = 0 \\ 1 + 0 + 0 + \gamma_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = -5/2 \\ \beta_1 = -1/2 \\ \gamma_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_2 = -1 \\ \beta_2 = 0 \\ \gamma_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_3 = 3/2 \\ \beta_3 = 1/2 \\ \gamma_3 = -1 \end{cases}$$

$$\pi_1 = \frac{Q}{(gh^3)^{1/2}}$$

$$\pi_2 = \frac{b}{h}$$

$$\pi_3 = \frac{\rho h^{3/2} g^{1/2}}{\eta}$$

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3) \rightarrow Re = \frac{\rho Q}{\eta b} \times (h \text{ ou } b)$$

triangulaire : $k = 5 \quad r = 3 \quad k - r = 2$

$$\pi_1 = Q h^{\alpha_1} g^{\beta_1} \eta^{\gamma_1}$$

$$\pi_2 = \rho h^{\alpha_2} g^{\beta_2} \eta^{\gamma_2}$$

$$\pi_1 = f(\pi_2) \rightarrow Re = \frac{\rho (\frac{Q}{\eta h^2}) h}{\eta} = \frac{2\rho Q}{\eta h}$$

3. Modèles et similitudes

1) $[\omega] = \text{T}^{-1} \quad [D] = \text{L} \quad [L] = \text{L} \quad [V] = \text{LT}^{-1} \quad [\rho] = \text{ML}^{-3} \quad [\mu] = \text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}$

2) $k = 6 \quad r = 3 \quad k - r = 3$ variables adimensionnelles

3) $r = 3$ grandeurs indépendantes D, V, ρ

$$\pi_1 = L D^{\alpha_1} V^{\beta_1} \rho^{\gamma_1}$$

$$\pi_2 = \mu D^{\alpha_2} V^{\beta_2} \rho^{\gamma_2}$$

$$\pi_3 = \omega D^{\alpha_3} V^{\beta_3} \rho^{\gamma_3}$$

$$\pi_1 = \frac{L}{D}$$

$$\begin{cases} -1 + \alpha_2 + \beta_2 - 3\gamma_2 = 0 \\ -1 + 0 - \beta_2 + 0 = 0 \\ 1 + 0 + 0 + \gamma_2 = 0 \end{cases} \begin{matrix} \alpha_2 = -1 \\ \beta_2 = -1 \\ \gamma_2 = -1 \end{matrix}$$

$$\pi_2 = \frac{\rho DV}{\mu}$$

$$\pi_3 = \frac{\omega D}{V}$$

Strouhal

4) $\frac{L}{D} = \frac{L_m}{D_m} \rightarrow L_m = \frac{L D_m}{D} = \frac{0,3 \times 20 \cdot 10^{-3}}{0,1} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ m}$

5) Si le modèle fonctionne dans l'eau :

$$Re = \frac{\rho D V}{\mu} = \frac{\rho_m D_m V_m}{\mu_m}$$

$$\rightarrow V_m = \frac{\rho}{\rho_m} \frac{\mu_m}{\mu} \frac{D}{D_m} V = 19 \text{ km/h}$$

Si le modèle était fait dans l'air : $V_m = \frac{D}{D_m} V = 250 \text{ km/h}$

6) Similitude du nombre de Strouhal :

$$St = \frac{w D}{V} = \frac{w_m D_m}{V_m} \Rightarrow w = w_m \frac{D_m}{D} \frac{V}{V_m} \approx 29 \text{ Hz}$$