

1	Notion de milieu continu	7
1.1	Qu'est ce qu'un fluide ?	7
1.2	Notion d'échelle mésoscopique	8
1.3	Notion de « particule fluide »	8
1.4	Vitesse d'une particule fluide	9
1.4.1	Quelques techniques de mesure de vitesse (vélocimétrie)	9
1.4.2	Quelques exemples de champ de vitesse :	9
1.5	Trajectoire de particules, ligne d'émission, ligne de courant et lignes de temps	9
1.5.1	Trajectoire de particule (<i>particle path</i>)	10
1.5.2	Ligne d'émission (<i>streakline</i>)	10
1.5.3	Ligne de courant (<i>streamline</i>)	10
1.5.4	Ligne de temps (<i>timeline</i>)	11
1.5.5	Changement de référentiel	11
1.6	Fonction de courant	11
1.6.1	Écoulement plan incompressible en coordonnées cartésiennes ou polaire plane	12
1.6.2	Écoulement axisymétrique - Fonction de Stokes -	12
1.7	Dérivée eulérienne et dérivée lagrangienne	13
2	Analyse dimensionnelle et similitude	15
2.1	Théorème π ou de Buckingham	15
2.2	Exemple de la traînée d'une sphère	17
2.3	Période des oscillations d'un pendule pesant	20
2.4	"Démonstration" du théorème de Pythagore	20
2.5	Questions et remarques	21
2.6	Notion de similitude	21
2.6.1	Similitude pour une maquette de navire	21
2.6.2	Pourquoi les enfants marchent-ils facilement pieds-nus sur les gravillons ?	21
2.6.3	Pourquoi un animal de 50 m de haut ne peut-il exister sur Terre ?	21
2.6.4	Pourquoi les animaux sautent-ils tous à peu près à la même hauteur ?	22
2.6.5	Pourquoi les sociétés de fourmis n'ont-elles pas inventé le feu ?	23
3	Le théorème du transport	25
3.1	Notion de volume de contrôle	25
3.2	Théorème de Leibnitz	25
3.3	Théorème du transport d'une fonction scalaire	26
3.4	Conservation de la masse	26

3.4.1	Démonstration	27
3.4.2	Cas particulier d'un fluide incompressible.	27
3.5	Théorème du transport d'une fonction vectorielle	27
3.6	Application au transport de la quantité de mouvement	28
3.7	Application au sillage d'un cylindre	29
3.8	Transport de l'énergie	30
4	Le tenseur des contraintes	33
4.1	Notion de tenseur cartésien de rang 2	33
4.2	Le tenseur des contraintes $[\sigma]$ (<i>stress tensor</i>)	34
4.3	Symétries du tenseur des contraintes	35
4.4	Calcul de la contrainte dans une direction quelconque $\vec{\sigma}(\vec{n})$	35
4.5	Le tenseur des contraintes visqueuses $[\sigma']$	35
4.6	Principe fondamental de la dynamique et divergence de $[\sigma']$	36
5	Hydrostatique	39
5.1	Equilibre de la pression dans le champ de pesanteur	40
5.1.1	Cas d'un fluide de masse volumique constante	41
5.1.2	Cas d'un fluide de masse volumique variable	43
5.1.3	Cas d'une atmosphère adiabatique	44
5.2	Equilibre de la pression dans un référentiel non galiléen	45
5.3	La poussée d'Archimède	45
5.3.1	Le poisson et le ludion	46
5.4	Equilibre des corps flottants	47
5.4.1	Centre de carène	47
5.4.2	Notion de métacentre	49
6	Fluides parfaits et équation d'Euler	51
6.1	Equation de Bernoulli	52
6.2	Généralisation de l'équation de Bernoulli	53
6.2.1	Cas d'un fluide barotrope	53
6.2.2	Cas d'un écoulement instationnaire mais irrotationnel	54
6.2.3	Effet Coanda	54
6.3	Quelques applications de l'équation de Bernoulli	55
6.3.1	Anémomètre à tube de Pitot	55
6.3.2	Effet Venturi et débitmètre de Venturi	56
6.3.3	Expérience de Torricelli	57
6.3.4	Effet Magnus	57
6.3.5	Portance d'une aile	58
6.3.6	Amplification des vagues par le vent	59
6.3.7	Jet incident sur une plaque	59
6.4	Paradoxe de d'Alembert	59
7	La viscosité des fluides	61
7.1	Tenseur des déformations $[\epsilon]$ (<i>strain tensor</i>)	61
7.2	Tenseur des taux de déformation (rate of strain tensor) ou tenseur des gradients de vitesse $[G]$	62

7.2.1	Décomposition d'un tenseur	62
7.2.2	Partie symétrique de $[G]$ ou tenseur $[e]$ des déformations pures	63
7.2.3	Partie antisymétrique de $[G]$ ou tenseur $[\omega]$ des rotations pures	64
7.3	Equation constitutive des fluides newtoniens	65
7.4	Divergence du tenseur des contraintes visqueuses	66
7.5	Equation de Navier-Stokes pour un fluide newtonien	66
7.6	Signification physique de la viscosité	67
7.7	Mesure de la viscosité	68
7.7.1	Quelques viscosimètres simples	68
7.7.2	Quelques exemples de rhéomètre	69
7.8	Quelques exemples de fluides non-newtoniens	70
8	L'équation de Navier-Stokes	73
8.1	Adimensionnement de l'équation de Navier-Stokes pour un fluide newtonien incompressible	73
8.1.1	Quelques valeurs de nombres de Reynolds	74
8.1.2	Quelques autres nombres sans dimension	75
8.2	Les conditions aux limites cinématiques et dynamiques	76
8.2.1	Les conditions cinématiques	76
8.2.2	Les conditions dynamiques	78
8.2.3	Tableau récapitulatif des conditions aux limites	80
9	Solutions laminaires de l'équation de Navier-Stokes	83
9.1	Les écoulements parallèles	83
9.1.1	Écoulement de Couette plan	84
9.1.2	Écoulement de Couette circulaire	84
9.1.3	Écoulement de Poiseuille plan	85
9.1.4	Écoulement sur un plan incliné	85
9.1.5	Écoulement de Poiseuille en conduite circulaire	85
9.1.6	Solutions instationnaires	87
9.2	Les écoulements à très faibles nombre de Reynolds	87
9.2.1	Equation de Stokes	87
9.2.2	Écoulement autour d'une sphère : force de Stokes	89
9.2.3	La sédimentation	91
9.2.4	La réversibilité et la vie aux faibles nombres de Reynolds	93
9.3	Les écoulements quasi-parallèles : les équations de la lubrification	94
9.3.1	Calcul d'un palier lubrifié	96
10	La couche limite	97
10.1	Introduction	97
10.1.1	Définitions de l'épaisseur de couche limite	97
10.2	Couche limite laminaire d'un fluide incompressible sur une plaque plane	99
10.2.1	Les équations de Prandtl (1904)	99
10.2.2	Profil de vitesse de Blasius (1907)	100
10.2.3	Calcul de la contrainte pariétale et du coefficient de traînée	101
10.3	Couche limite turbulente	102
10.4	Couche limite sur une paroi courbée : décollement et contrôle de la couche limite	102

11	La tension de surface	105
11.1	Origine microscopique	105
11.2	La loi de Laplace	108
11.3	Angle de contact entre 3 phases	109
11.3.1	Loi d'Young-Dupré	109
11.4	La longueur capillaire (effet de la gravité)	110
11.5	La mesure de la tension superficielle	111
11.5.1	La loi de Jurin	111
11.5.2	Lame de Wilhelmy et anneau de Noüy	113
11.5.3	Méthode de la goutte pendante	113
11.6	Effets de la température	113
11.7	Les tensioactifs	114
11.7.1	Pourquoi met-on du savon pour se laver les mains ?	114
11.7.2	Pourquoi peut-on faire des membranes de savon et pas des membranes d'eau ?	114
12	La portance sur une aile	117
12.0.3	Etude du décolage	118
12.0.4	Utilisation de la polaire Eiffel	120
12.0.5	Cas d'un voilier	120
12.1	Nage et vol animal	124
12.1.1	Les oiseaux	124
12.1.2	Les poissons	124
13	Personnages marquants	127
	Références	135

Chapitre 1

Notion de milieu continu

Sommaire

1.1	Qu'est ce qu'un fluide ?	7
1.2	Notion d'échelle mésoscopique	8
1.3	Notion de « particule fluide »	8
1.4	Vitesse d'une particule fluide	9
1.4.1	Quelques techniques de mesure de vitesse (vélocimétrie)	9
1.4.2	Quelques exemples de champ de vitesse :	9
1.5	Trajectoire de particules, ligne d'émission, ligne de courant et lignes de temps	9
1.5.1	Trajectoire de particule (<i>particle path</i>)	10
1.5.2	Ligne d'émission (<i>streakline</i>)	10
1.5.3	Ligne de courant (<i>streamline</i>)	10
1.5.4	Ligne de temps (<i>timeline</i>)	11
1.5.5	Changement de référentiel	11
1.6	Fonction de courant	11
1.6.1	Écoulement plan incompressible en coordonnées cartésiennes ou polaire plane	12
1.6.2	Écoulement axisymétrique - Fonction de Stokes -	12
1.7	Dérivée eulérienne et dérivée lagrangienne	13

1.1 Qu'est ce qu'un fluide ?

Un milieu continu est un milieu dont les propriétés et les champs associés sont définis en tout point, continus et dérivables. On distingue deux types de milieux continus : les solides et les fluides. Un solide est rigide (indéformable, élastique ou plastique) et même si les molécules vibrent, elles gardent les mêmes voisins. Il n'y a pas d'écoulement sous contrainte. Pour un liquide ou un gaz au contraire, sous l'action d'une contrainte donnée la déformation se poursuit indéfiniment. La mécanique des fluides s'intéresse à ces déformations infinies, ou plutôt aux vitesses de déplacement appelées *taux de déformations* qui caractérisent le champ de vitesse sous écoulement. D'autre part nous appellerons fluide indifféremment un gaz ou un liquide, la seule chose importante pour la mécanique des fluides étant de savoir si la masse volumique le long d'une trajectoire fluide reste constante ou non.

1.2 Notion d'échelle mésoscopique

On peut définir trois échelles de longueur ou de temps pour un milieu fluide : l'échelle microscopique, l'échelle macroscopique et entre les deux une échelle intermédiaire que l'on nomme *échelle mésoscopique*.

Echelle microscopique λ

C'est l'échelle des molécules de fluides (libre parcours moyen λ ou temps moyen entre collision τ). Sur cette échelle les particules ont des trajectoires balistiques (mouvement brownien) avec une vitesse microscopique moyenne donnée par la température.

Echelle mésoscopique δ

C'est une échelle de taille supérieure à quelques dizaines de libre parcours moyen. A cette échelle on peut déjà effectuer une moyenne spatiale sur un volume, moyenne relativement significative et peu fluctuante car il y aura déjà quelques milliers de particules, et définir une vitesse moyenne sur ce volume. Ce volume mésoscopique porte le nom de *particule fluide*. A l'équilibre thermodynamique, la distribution de vitesse brownienne est isotrope et l'on trouve une vitesse moyenne ou *vitesse fluide* nulle. Hors équilibre, par exemple avec une pression inhomogène, il existe un écoulement et donc une vitesse non nulle de la particule fluide.

Echelle macroscopique L

C'est l'échelle de variation des champs de vecteurs (vitesse $\vec{v}$, accélération $\vec{a}$, ...) ou scalaire (pression P , masse volumique ρ , température T , ...). Si cette échelle est suffisamment grande devant l'échelle mésoscopique, on peut faire de la *Physique du milieu continu*, c'est-à-dire supposer que les grandeurs mésoscopiques ou *fluides* sont définies en tout point $\vec{r}$ et tout temps t , on écrira par exemple $\vec{v}(\vec{r}, t)$ ou $\rho(\vec{r}, t)$.

On supposera donc toujours ici que $\lambda \ll \delta \ll L$.

Etablir les équations de la mécanique des fluides (équation de Navier-Stokes) à partir des propriétés microscopiques et de la thermodynamique hors équilibre (équation de Boltzmann) est une tâche ardue qui suppose de prendre des moyennes sur ces différentes échelles. Dans certaines hypothèses la démonstration a été faite par Chapman et Enskog pour un gaz monoatomique (S. Chapman et T.G. Cowling, *The Mathematical Theory of Nonuniform Gases*. Cambridge University Press, 1960).

1.3 Notion de « particule fluide »

On nomme « particule fluide » une petite masse de fluide de taille mésoscopique δ . On suppose sa taille suffisamment faible, $\delta \ll L$, pour que l'on puisse considérer que son volume tend vers zéro (tout en restant suffisamment volumineuse pour que les valeurs locales restent statistiquement définies $\delta \gg \lambda$) et donc que l'on peut définir les dérivées des champs en tout point. Pour les fluides denses, et les échelles macroscopiques usuelles cela ne pose pas trop de problème. On peut alors faire de la *Mécanique des milieux continus*.

Quelques cas délicats où il faut utiliser la mécanique statistique hors-équilibre : gaz dilué comme dans les nuages interstellaires ($\lambda \approx 10^4$ km et $\tau \approx 5$ jours), nanofluidique, ondes de choc, rentrée d'une navette spatiale dans l'atmosphère ($\lambda >$ taille de la navette).

Nota : Par définition une particule fluide conserve sa masse, mais pas forcément son volume si le fluide est compressible.

1.4 Vitesse d'une particule fluide

La vitesse d'une particule fluide est la moyenne sur son volume mésoscopique de la vitesse de chacune des molécules présentes à cet instant dans le volume. Notons que ce ne sont pas toujours les mêmes molécules qui constituent la *particule fluide*, certaines rentrent, d'autres sortent (ce phénomène caractérise la diffusion moléculaire).

Le mouvement d'une particule fluide peut toujours se décomposer en un mouvement de translation (donné par la vitesse $\vec{v}$), de rotation (donné par un vecteur rotation instantané $\vec{\omega}$ appelé en mécanique des fluides vorticité) et de déformation (donné par le tenseur des gradients de vitesse $\left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right]$). Nous reverrons ce point dans le module 3.

1.4.1 Quelques techniques de mesure de vitesse (vélocimétrie)

Voici quelques exemples des techniques classiques de mesure des vitesses dans un fluide.

- Mesure de forces ou de couples et étalonnage. Robuste, simple mais peu précis et perturbant l'écoulement.
- Suivi de particules (*particle tracking*) par exemple un ballon atmosphérique, une tâche de colorant, ... C'est une mesure dite lagrangienne car mesurée en suivant un objet à différents instants et donc à différentes positions et non pas en un point fixe.
- Anémométrie à fil chaud. On mesure le refroidissement d'un fil mince parcouru par un courant électrique. Permet d'atteindre 10^5 mesures par secondes.
- Anémométrie laser (LDV : *Laser Doppler Velocimetry*). Basée sur la détection de la lumière émise par une particule traversant l'intersection de deux faisceaux lasers. Mesure non perturbative d'une composante de la vitesse en un point. Nécessite un fluide transparent.
- Anémométrie Doppler ultrasonore. Basé sur le décalage Doppler d'une impulsion acoustique réfléchi par une particule. Permet la mesure des vitesses longitudinales sur toute une ligne de visée.
- Vélocimétrie par image de particules (PIV : *Particle Image Velocimetry*). Basé sur la corrélation entre des portions d'images successives où de petites particules solides transportées par le fluide sont rendues visibles par un fort éclairage (par exemple un plan laser). Cette technique permet d'obtenir par calcul informatique un champ de vitesse sur un maillage du plan des images, où plus précisément les deux composantes de la vitesse contenues dans le plan de l'image.

1.4.2 Quelques exemples de champ de vitesse :

Les figures suivantes présentent dans un plan les vecteurs vitesse projetés dans ce plan sur un maillage régulier. Les données pouvant venir soit de simulations numériques soit de mesures expérimentales.

1.5 Trajectoire de particules, ligne d'émission, ligne de courant et lignes de temps

De nombreuses techniques expérimentales sont utilisées pour visualiser la structure d'un écoulement. Elles conduisent à introduire les notions de trajectoire de particules, de ligne d'émission, de ligne de courant ou de ligne de temps. Ces différentes notions risquent de se confondre facilement, en effet les trois premières sont équivalentes pour un écoulement stationnaire ($\partial/\partial t = 0$). Ce n'est que pour un écoulement *instationnaire* que ces notions sont vraiment différentes.

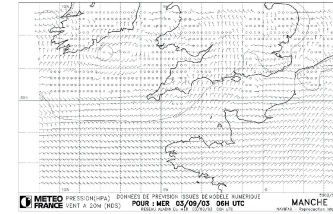


FIGURE 1.1 – Carte météorologique de France montrant la prévision des vents.

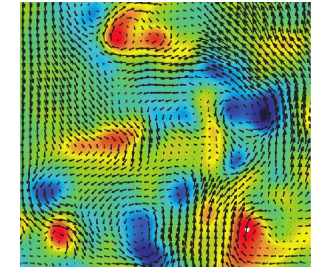


FIGURE 1.2 – Champ de vitesse turbulent mesuré par PIV.

1.5.1 Trajectoire de particule (*particle path*)

C'est l'ensemble des points occupés par une particule fluide au cours du temps. Mathématiquement on peut écrire : $\vec{OM} = \vec{r} = f(\vec{r}_0, t)$ où $\vec{r}_0$ est la position initiale de la particule à l'instant $t = 0$. C'est donc ce que l'on appelle un suivi *lagrangien* (suivre le déplacement d'un objet donné au cours du temps). Par définition la tangente à la trajectoire est parallèle au vecteur vitesse qu'avait la particule à l'instant où elle passait en ce point. Un façon classique d'obtenir la trajectoire est de prendre une photo en pause longue tout en éclairant l'écoulement de façon continue.

1.5.2 Ligne d'émission (*streakline*)

Elles sont facile à réaliser expérimentalement en prenant une photographie à un instant t d'un filet de colorant émis en continu depuis un certain temps à partir d'un point source fixe. Attention le vecteur vitesse n'a aucune raison d'être tangent à cette courbe pour un écoulement instationnaire.

1.5.3 Ligne de courant (*streamline*)

Ligne théorique qu'il est difficile d'observer expérimentalement mais que l'on peut calculer à l'issue d'une simulation. C'est la courbe qui, à un instant donné, est tangente en tout point au vecteur vitesse en ce point. Cela suppose donc de connaître a priori le champ de vitesse en tout point. C'est la ligne de champ classique d'un champ de vecteur à un instant donné (champ électromagnétique par exemple). En coordonnées cartésiennes elle est donnée par l'équation $dx/u = dy/v = dz/w$ si $\vec{v} = (u, v, w)$.

- Deux lignes de champ ne se croisent qu'en des points de stagnation (auss appelé points cols) où la vitesse est nulle.
- On peut bien-sur aussi définir des surfaces de courant et des tubes de courant. Pour un fluide incompressible le débit *massique* $Q_m = \int \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$ ou le débit volumique $Q_v = \int \vec{v} \cdot d\vec{S}$ se conservent le long d'un tube de champ. Pouvez-vous le montrer ?

Exercice : dessiner les lignes de courants, lignes d'émission et trajectoires de particules pour un écoulement homogène mais qui change de direction de 90° à un instant donné.

Rappelons que pour un écoulement stationnaire, $\vec{v}(\vec{r})$ indépendant du temps, lignes de courant, lignes d'émission et trajectoires de particule sont identiques.

1.5.4 Ligne de temps (timeline)

Position à un instant t d'un ligne marquée dans le fluide à un instant initial et transportée (on dit advectée ou convectée) ensuite par l'écoulement. Elles sont assez facile à réaliser expérimentalement et donnent une idée de la composante du vecteur vitesse normale (perpendiculaire) à la ligne.

1.5.5 Changement de référentiel

Un écoulement stationnaire dans un certain référentiel peut ne pas l'être dans un autre. De ce fait la transformations de ces différentes lignes n'est pas évidente comme l'illustre la série de figures suivantes :

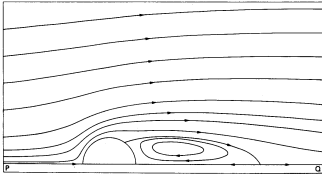


FIGURE 1.3 – Ecoulement stationnaire autour d'un cylindre fixe à un nombre de Reynolds de 40. Visualisation par lignes d'émission qui sont aussi dans ce cas des lignes de courant et des trajectoires de particules. D'après Réf. [28] p. 76.

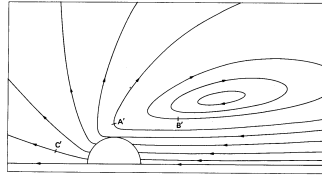


FIGURE 1.4 – Ligne de courant autour d'un cylindre en mouvement de droite à gauche au même nombre de Reynolds dans un référentiel où le fluide est initialement au repos. D'après Réf. [28] p. 76.

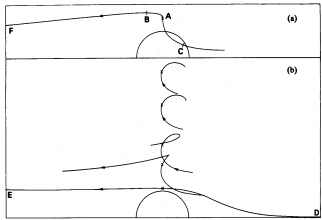


FIGURE 1.5 – Trajectoires de particules dans le référentiel où le fluide est au repos et où le cylindre se déplace de droite à gauche. D'après Réf. [28] p. 78.

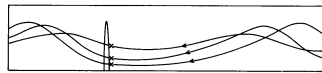


FIGURE 1.6 – Trajectoire de particules piégées dans les tourbillons de recirculation dans le référentiel où le fluide est au repos (noter l'échelle transverse dilatée). D'après Réf. [28] p. 79.

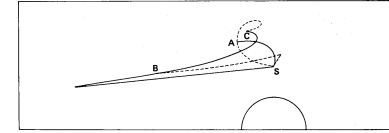


FIGURE 1.7 – Lignes d'émission dans le référentiel où le fluide est au repos. D'après Réf. [28] p. 79.

1.6 Fonction de courant

Pour un écoulement incompressible nous verrons que l'hypothèse de conservation de la masse conduit à l'équation $\text{div } \vec{v} = 0$ (voir chapitre 3 page 25) et on peut donc écrire que $\vec{v} = \text{rot } \vec{A}$ comme on le fait pour le champ électromagnétique $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$. Le vecteur $\vec{A}$ est appelé le potentiel vecteur du champ de vitesse $\vec{v}$ et $\vec{v}$ satisfait alors obligatoirement la condition d'incompressibilité. Noter que $\vec{A}$ est défini à une jauge près et que $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla C$ est aussi solution. Cette transformation est en général peu utile (on transforme un champ de vecteur en un autre champ vectoriel moins intuitif) sauf si l'écoulement est 2C2D, c'est-à-dire s'il n'a que deux composantes (2C) de vitesse non nulles et qu'elles ne dépendent que deux dimensions d'espace (2D). En effet dans ce cas la connaissance du champ de vitesse se ramène à la connaissance d'un scalaire, la *fonction de courant* ψ .

1.6.1 Ecoulement plan incompressible en coordonnées cartésiennes ou polaire plane

Supposons un écoulement plan d'un fluide incompressible, ou plus précisément un écoulement 2C2D : $\vec{v} = (u(x, y), v(x, y), 0)$, c'est-à-dire sans composante selon Oz . Alors on peut écrire :

$$\vec{v} = \text{rot} \left(\psi \vec{k} \right), \quad (1.1)$$

soit $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ et $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$. ψ est la fonction de courant, elle garde une valeur constante sur une ligne de courant.

Nota : Le débit par unité de longueur transverse est constant entre deux lignes de courant et vaut $Q_v = \int_A^B \vec{u} \cdot \vec{ds} = \int_A^B \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \vec{e}_x - \frac{\partial \psi}{\partial x} \vec{e}_y \right) \cdot (d\vec{l} \wedge \vec{e}_z) = \int_A^B d\psi = \psi_B - \psi_A$, car $d\vec{l} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y$.

1.6.2 Ecoulement axisymétrique - Fonction de Stokes -

Dans le cas d'un écoulement incompressible 2C2D axisymétrique (sans composante orthoradiale) on doit utiliser une autre définition de la fonction de courant, la *fonction de Stokes*.

– En coordonnées cylindriques : $\vec{v} = (u_r(r, z), 0, u_z(r, z))$ et l'on peut écrire :

$$\vec{v} = \text{rot} \left(-\frac{\psi(r, z)}{r} \vec{e}_\theta \right). \quad (1.2)$$

– En coordonnées sphériques : $\vec{v} = (u_r(r, \theta), u_\theta(r, \theta), 0)$ et l'on peut écrire :

$$\vec{v} = \text{rot} \left(\frac{\psi(r, \theta)}{r \sin \theta} \vec{e}_\phi \right). \quad (1.3)$$

Là encore, connaître ψ suffit pour connaître le champ vectoriel de vitesse $\vec{v}$.

Remarque : Pour un écoulement compressible instationnaire ou 3D3C, il n'existe pas de fonction de courant.

Exercice : Vérifier que la fonction ψ est bien constante sur une ligne de courant ($d\psi = 0$) dans les trois systèmes de coordonnées.

1.7 Dérivée eulérienne et dérivée lagrangienne

Les dérivées eulériennes et lagrangiennes sont aussi appelées respectivement dérivées locales et dérivées totales. Cette dernière dérivée s'appelle encore parfois dérivée particulaire ou dérivée convective. Elles apparaissent en mécanique des fluides lorsqu'une grandeur est étudiée en un point qui se déplace dans l'espace. Il faut alors distinguer les variations au cours du temps de la fonction en un point coïncidant fixe des variations dues au fait que le point explore des lieux différents de l'espace.

Prenons un exemple. Lors d'un trajet en voiture vous mesurez l'évolution de la température extérieure. Il fait par exemple 15° à Paris à 8 heures du matin et 35° à Marseille à 16 heures. Vous connaissez donc la variation de la fonction T au cours du temps, $\frac{dT}{dt}$, mais en différents points d'espace au cours du temps. Vous ne connaissez pas séparément $\frac{\partial T}{\partial t}$ ou $\frac{\partial T}{\partial x}$.

Soit T une fonction scalaire de plusieurs variables $T(\vec{r}, t)$. On peut écrire :

$$dT = \frac{\partial T}{\partial t} dt + \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial y} dy + \frac{\partial T}{\partial z} dz.$$

Soit :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} u + \frac{\partial T}{\partial y} v + \frac{\partial T}{\partial z} w,$$

avec $u = dx/dt$, $v = dy/dt$ et $w = dz/dt$.

Classiquement en mécanique des fluides on note cette dérivée totale $\frac{DT}{Dt} = \frac{dT}{dt}$ pour faire bien ressortir que cette dérivée totale n'est pas du tout une dérivée partielle. Sous forme vectorielle on a donc :

$$\boxed{\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}(T)}.$$

On a le même calcul pour une fonction vectorielle. Chacune de ses composantes est un scalaire ayant une dérivée lagrangienne donnée par l'équation précédente. D'une façon symbolique on peut alors écrire pour tout vecteur $\vec{A}$ sa dérivée lagrangienne :

$$\frac{D\vec{A}}{Dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$$

ou encore sous forme d'opérateur :

$$\frac{D \cdot}{Dt} = \frac{\partial \cdot}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \cdot$$

Par exemple l'accélération lagrangienne (dérivée en suivant la particule de sa vitesse) est donnée par :

$$\boxed{\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}}. \quad (1.4)$$

Le premier terme du membre de droite est le terme d'accélération eulérienne (en un point fixe), le second l'accélération due au déplacement dans l'espace à un instant fixé. Attention à la concision de la notation, ce deuxième terme résume en fait 9 termes de la forme $v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$. Nous utiliserons ces notions dans les prochains modules, mais nous pouvons déjà annoncer qu'une grande partie des difficultés de la mécanique des fluides vient de ce second terme car il est non-linéaire : si la vitesse est doublée, ce terme est multiplié par 4 !

Chapitre 2

Analyse dimensionnelle et similitude

Sommaire

2.1	Théorème π ou de Buckingham	15
2.2	Exemple de la trainée d'une sphère	17
2.3	Période des oscillations d'un pendule pesant	20
2.4	"Démonstration" du théorème de Pythagore	20
2.5	Questions et remarques	21
2.6	Notion de similitude	21
2.6.1	Similitude pour une maquette de navire	21
2.6.2	Pourquoi les enfants marchent-ils facilement pieds-nus sur les gravillons ?	21
2.6.3	Pourquoi un animal de 50 m de haut ne peut-il exister sur Terre ?	21
2.6.4	Pourquoi les animaux sautent-ils tous à peu près à la même hauteur ?	22
2.6.5	Pourquoi les sociétés de fourmis n'ont-elles pas inventé le feu ?	23

Les mathématiciens et les physiciens théoriciens résolvent des équations adimensionnées dont les paramètres et les coefficients sont des nombres réels ou complexes. Pourtant concrètement le physicien cherche des relations entre des quantités qui ont une dimension ; des forces, des énergies, des viscosités, des tailles ou des masses volumiques par exemple. Ces dimensions sont toutes exprimables dans une base de dimensions, par exemple le Système International (SI), ou simplement masse, longueur et temps dans la plupart des applications en mécanique. Ce choix n'est pas unique, on peut par exemple préférer un système construit avec une force, une énergie, etc. Nous savons qu'une équation, pour avoir un sens, doit être "homogène en dimension". Mais on peut aller un peu plus loin, et prédire à partir d'une hypothèse réaliste sur les paramètres pertinents la dépendance d'une quantité en fonction des autres variables et d'un certain nombre de "nombres sans dimension" dont la mécanique des fluides est si friande.

Présentons maintenant plus formellement la méthode de l'analyse dimensionnelle avant d'étudier un exemple au § 2.2 page 17.

2.1 Théorème π ou de Buckingham

Traduit de l'article de Bernard CASTAING [5], pages 62-64.

Il semble que l'analyse dimensionnelle ait été utilisée au moins depuis Galilée. Elle est utilisée depuis longtemps pour résoudre des problèmes de mécanique des fluides, et c'est maintenant un outil

courant en physique. [...]

L'idée de base est bien connue. Imaginons qu'une expérience ait été réalisée avec des conditions aux limites particulières et que tout ait été exprimé dans le Système International (SI ou MKSA). Pour l'exprimer en CGS nous multiplions simplement les nombres représentant les longueurs par 10^2 , les masses par 10^3 , les densités par 10^{-3} . Mais imaginons que nous oublions de le faire et changions simplement le nom des unités. Notre résultat serait celui d'un nouveau problème où les longueurs seraient 10^2 fois plus petites, les masses 10^3 fois plus petites et les densités 10^3 fois trop grandes. En résolvant notre problème, nous avons donc résolu toute une classe de problèmes équivalents. En réalité ce n'est peut-être pas très utile car peu de liquides ont des densités 10^3 fois supérieures à celle de l'eau par exemple ! Certaines quantités doivent être maintenues constantes (la vitesse de la lumière par exemple) si elles ont quelques importances.

Formalisons cela en utilisant les travaux de Edgar BUCKINGHAM (Phys. Rev., **14**, 345 (1914)). Soit $y_1, \dots, y_n$ les paramètres (conditions aux limites, quantités importantes) et y la quantité inconnue. Nous recherchons une relation mathématique :

$$y = f(y_1, \dots, y_n).$$

Soit $A_1, \dots, A_m$ les m dimensions *indépendantes* (M pour la masse, T pour le temps, ...). Nous verrons que le nombre de dimensions indépendantes n'est pas déterminé de façon évidente mais supposons qu'il le soit. Alors les dimensions des y_i s'expriment en fonction des A_j :

$$[y_i] = A_1^{\alpha_{1i}}, \dots, A_m^{\alpha_{mi}}.$$

L'expression :

$$y_1^{x_1} y_2^{x_2} \dots y_n^{x_n}$$

sera sans dimension si les m équations :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{ji} x_i = 0$$

sont satisfaites. Nous pouvons alors former $n - m$ quantités sans dimensions "indépendantes" : $\pi_1, \dots, \pi_{n-m}$. Prenons ces quantités comme nouveaux paramètres, et appelons $y'_1, \dots, y'_m$ les paramètres restants. Ces y'_i ont des dimensions indépendantes et il existe des exposants β_i tels que :

$$[y] = [y'_1]^{\beta_1} \dots [y'_m]^{\beta_m}.$$

Alors l'expression

$$\pi = y y_1'^{-\beta_1} \dots y_m'^{-\beta_m}$$

est sans dimension et est une fonction de tous les paramètres :

$$\pi = h(y'_1 \dots y'_m, \pi_1, \dots, \pi_{n-m}).$$

Ni π , ni les valeurs de π_i ne dépendent du système d'unité. Nous pouvons donc choisir ces unités pour que tous les $y'_i = 1$ et :

$$\pi = h(1 \dots 1, \pi_1, \dots, \pi_{n-m}) = g(\pi_1, \dots, \pi_{n-m}).$$

Ceci est le théorème de Buckingham : une quantité inconnue sans dimension peut uniquement dépendre des nombres sans dimension formés à partir des paramètres. Le cas le plus intéressant correspond au

cas où on ne peut former aucun paramètre sans dimension. Alors la fonction g est une constante g_0 et le problème est entièrement résolu à cette constante multiplicative près :

$$y = g_0 y_1^{\beta_1} \dots y_m^{\beta_m}.$$

[...]

On peut choisir autant de dimensions indépendantes que l'on veut. Cela introduit simplement des facteurs de conversion qui agissent comme de nouveaux paramètres. Cela n'a pas d'intérêt sauf si l'on sait que ces facteurs ne peuvent pas intervenir dans le problème. Par exemple, on considère habituellement que le temps et une longueur ont des dimensions différentes. Pourtant, à cause de la théorie de la relativité, c'est artificiel et cela introduit un « facteur de conversion » qui est la vitesse de la lumière. En mécanique classique, nous savons que ce paramètre ne va pas intervenir, ce qui donne tout son intérêt à distinguer le temps et l'espace.

• **Attention**, l'analyse dimensionnelle est un outil extrêmement puissant, mais aussi très dangereux ! Si l'on oublie ou si l'on se trompe sur le choix des variables physiques à considérer le résultat devient faux. Le « sens physique » doit permettre de sélectionner les variables indépendantes pertinentes.

2.2 Exemple de la traînée d'une sphère

Appliquons maintenant ce théorème sur un premier exemple concret. On cherche à calculer la force de traînée d'une sphère dans un liquide visqueux. On recherche une solution stationnaire F_D du problème. De quoi peut-elle dépendre ? Certainement du rayon R de la sphère, de la vitesse U de déplacement de l'obstacle par rapport au liquide et de la viscosité ν du liquide (cette propriété sera décrite dans le module 7) quantité qui différencie par exemple le mouvement dans l'eau du mouvement dans du miel. L'analyse dimensionnelle nous donne :

- dimension de R , une longueur. Ce que l'on note $[R] = L$.
- $[U] = L/T$ où T est un temps.
- $[\nu] = L^2/T$.
- $[F_D] = ML/T^2$ où M est une masse.

Comme il n'y a pas de masse dans les trois premières variables on ne peut pas avoir d'équation du type $F_D = f(R, U, \nu)$. Il y a forcément une autre variable contenant une unité de masse qui intervient dans le problème. Peut-être la masse volumique ρ du fluide. Attention si l'on met ici autre chose comme la masse volumique de la sphère, ou sa masse, ... on peut trouver des résultats justes au niveau des dimensions mais incorrects au point de vue de la physique. L'intuition physique a donc beaucoup d'importance à ce niveau. Formellement on peut tout à fait mettre ici la masse de l'expérimentateur, ou même celle de sa belle-mère, mais ce n'est pas forcément pertinent !

Supposons donc que nous écrivions que $F_D = f(R, U, \nu, \rho)$ nous aurons donc à satisfaire l'équation aux dimensions $[F_D] = [R]^\alpha [U]^\beta [\nu]^\gamma [\rho]^\delta$ soit $ML/T^2 = L^\alpha (L/T)^\beta (L^2/T)^\gamma (M/L^3)^\delta$. Ce qui nous donne un système de 3 équations et 4 inconnues, avec par exemple comme solution $\delta = 1, \gamma = 2 - \alpha, \beta = \alpha$ avec α libre. On peut donc écrire

$$F_D = R^\alpha U^\alpha \nu^{2-\alpha} \rho F(Re)$$

où $Re = \frac{U 2R}{\nu} = \frac{UD}{\nu}$ est appelé le nombre de Reynolds et c'est le seul nombre sans dimensions que l'on peut fabriquer avec les variables R, U, ν, ρ (vérifier le). Pour $\alpha = 2$ on peut écrire une forme

équivalente plus simple :

$$F_D = \rho U^2 R^2 F'(Re).$$

On définit souvent le coefficient de traînée (sans dimension), C_D parfois aussi appelé C_x en français par :

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho U^2 A},$$

où $A = \pi R^2$ est l'aire de la section de l'obstacle.

Notre analyse dimensionnelle nous prédit que $C_D = f(Re)$. C'est en effet ce que l'on observe expérimentalement (figure 2.1). A faible nombre de Reynolds on démontrera (§ 9.2.2) le résultat exact $C_D = 24/Re$. Ceci montre que la force de traînée F_D augmente d'abord comme la vitesse à faible Re puis comme le carré de la vitesse lorsque $C_D \approx \text{cste}$, sauf au moment du décrochement appelé crise de traînée pour $Re \approx 400\,000$.

Lorsque le Reynolds n'est pas très petit devant l'unité, Oseen a calculé le terme correcteur (valable si $Re \leq 5$) : $C_D = \frac{24}{Re} (1 + \frac{3}{16} Re)$.

Il existe ensuite des formules empiriques approchées qui donnent d'assez bon résultats jusqu'à la crise de traînée ($Re \leq 400\,000$) par exemple la relation de White :

$$C_D = \frac{24}{Re} + \frac{6}{1 + \sqrt{Re}} + 0,4.$$

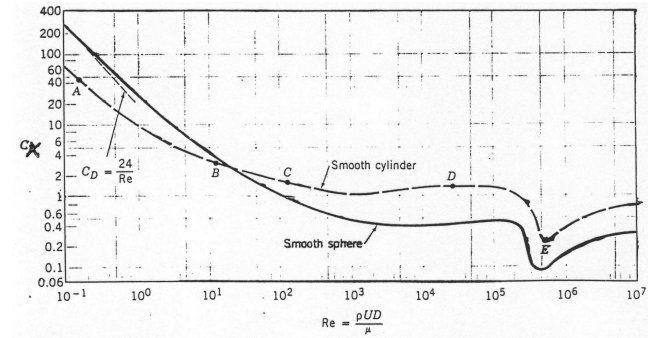


FIGURE 2.1 – Evolution de la traînée adimensionnée d'une sphère ou d'un cylindre par unité de longueur en fonction du nombre de Reynolds. Noter les échelles logarithmiques. D'après Réf. [2] page 441.

• Applications :

- Calculer de la traînée sur une balle de tennis à 200 km/h. $R = 33$ mm, $\nu_{air} = 15 \cdot 10^{-6} m^2/s$, $\rho_{air} = 1,29 Kg/m^3$. Comparer au poids de la balle ($M = 50$ g).
Notons que si la sphère n'est pas lisse (cas d'une balle de golf par exemple, du duvet de la balle de tennis) il apparaît au moins une nouvelle variable sans dimension (par exemple le rapport rugosité/rayon comme sur la figure 2.2).

De même s'il existe plus d'une dimension (ellipsoïde plutôt que sphère par exemple) alors l'analyse dimensionnelle prédit l'existence d'au moins un autre nombre sans dimension, par exemple le rapport grand axe sur petit axe a/b si on a affaire à une ellipsoïde de révolution. Ensuite le problème peut aussi dépendre de l'angle α entre l'axe de l'ellipsoïde et l'écoulement. Alors on aura $C_D = f(Re, a/b, \alpha)$.

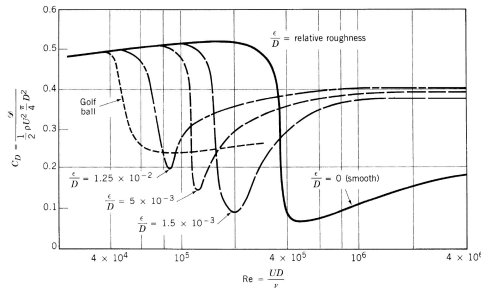


FIGURE 2.2 – Effet de la rugosité sur la crise de traînée d'une sphère. D'après Réf. [2].

- Calculer le fardage (force de traînée) dû au mât de 20 mètres de haut d'un voilier dans un vent de 30 Nœuds (≈ 60 km/h) si $R = 10$ cm (le C_D d'un cylindre est environ le double de celui d'une sphère dans cette gamme de nombre de Reynolds).
- Calcul de la traînée sur une plaque plane infiniment mince. Pour une plaque mince de largeur b et de longueur l (dans le sens de l'écoulement) on pose $C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho U^2 A} = f(Re, b/l)$, où $A = b \times l$ et $Re = Ul/\nu$. On suppose que $b \ll l$. Pour $Re < 10^5$ on trouve expérimentalement $C_D = 1,33 Re^{-1/2}$ et pour $Re > 10^6$ on trouve $C_D^{1/2} \log(Re C_D) \approx 0,242$ ([4] p. 307). Calculer la force de traînée sur la quille d'un monocoque de type "60 pieds open". On prendra $b = 3$ m, $l = 0,5$ m, $U = 10$ Nœuds, $\rho = 10^3$ kg/m³ et $\nu = 10^{-6}$ m²/s. On trouve alors $C_D \approx 3,7 \cdot 10^{-3}$ et $F_D = 73$ N. On trouverais certainement nettement plus en tenant compte de l'incidence non nulle de la quille.
- En ces temps de record... En athlétisme et particulièrement pour un 100 mètres il paraît que l'on ne peut espérer battre un record du monde par temps froid. Ceci est sans doute dû à l'augmentation de la force de traînée avec une baisse de température. En effet de 30°C à 10°C, la masse volumique de l'air ρ_{air} augmente d'environ 10 % ce qui augmente d'autant la force de traînée $F_D = \frac{1}{2} \rho U^2 A C_D$.
- Toujours en athlétisme la plupart des records ne sont validés que si le vent favorable est inférieur à 2 m/s. Regardons l'effet sur la force de traînée d'un vent favorable de 2 m/s. Un coureur de 100 m à une vitesse de l'ordre de 100 m / 10 s = 10 m/s. Il a donc selon qu'il y a du vent ou pas une vitesse relative de 8 ou 10 m/s. Comme la force de traînée $F_D = \frac{1}{2} \rho U^2 A C_D$ varie comme le carré de la vitesse apparente, la force de traînée avec un vent dans le dos de 2 m/s est près de 40% plus faible que sans vent. C'est donc un énorme avantage.

2.3 Période des oscillations d'un pendule pesant

Soit un pendule constitué d'une masse ponctuelle m pouvant osciller librement sous l'action de la gravité au bout d'une tige de longueur l . On recherche une expression pour la période T des oscillations.

1. Si l'on suppose que $T = f(l)$ uniquement, l'analyse dimensionnelle nous montre que c'est impossible.
2. Si l'on suppose que $T = f(l, g)$ l'analyse dimensionnelle prédit que $T \propto \sqrt{l/g}$ ce qui n'est pas mal du tout sachant que le résultat exact pour de petites oscillations est $T = 2\pi \sqrt{l/g}$!
3. Si l'on suppose que $T = f(l, g, a)$ où a est l'amplitude horizontale des oscillations on trouve $T = \sqrt{l/g} F(a/l)$.
4. Si l'on suppose que $T = f(l, g, m)$ on trouve que T ne peut pas dépendre de m sans dépendre d'autres variables faisant intervenir la dimension d'une masse.
5. enfin si l'on suppose que $T = f(l, g, m, \eta, a)$ où η est la viscosité de l'air, on voit apparaître d'autres nombres sans dimensions possibles.

2.4 "Démonstration" du théorème de Pythagore

(D'après [29] page 17.)

Soit un triangle ABC rectangle et appelons B le sommet dont l'angle est le plus petit, et AH la hauteur passant par A et coupant BC en H. Soit a la longueur du segment BC, b la longueur de AC et c celle de AB. La surface du triangle ABC est donc la somme de la surface du triangle ACH et celle du triangle AHB : $S_{ABC} = S_{ACH} + S_{AHB}$. De plus appelons α le plus petit angle du triangle, ici l'angle $\widehat{ABC}$. Nous retrouvons ce même angle pour $\widehat{CAH}$. Nous supposons enfin que tout triangle rectangle est parfaitement défini par la connaissance de son hypoténuse et par la valeur de son plus petit angle. Pour respecter l'analyse dimensionnelle, la surface de tout triangle rectangle est alors égale au carré de son hypoténuse multiplié par une fonction de ce plus petit angle. Nous avons donc $S_{ABC} = a^2 f(\alpha)$, mais aussi $S_{ACH} = b^2 f(\alpha)$ et $S_{AHB} = c^2 f(\alpha)$. Comme $S_{ABC} = S_{ACH} + S_{AHB}$, il vient : $a^2 f(\alpha) = b^2 f(\alpha) + c^2 f(\alpha)$ soit $a^2 = b^2 + c^2$ puisque $f(\alpha)$ est une constante non nulle ! Nous avons démontré le théorème de Pythagore grâce à l'analyse dimensionnelle !

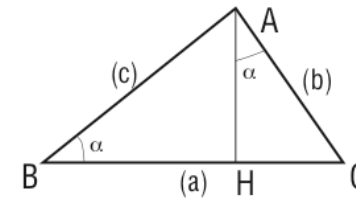


FIGURE 2.3 – Démonstration du théorème de Pythagore.

2.5 Questions et remarques

– Pourquoi est-ce toujours une loi de puissance qui apparaît entre les variables dans le théorème II ? Parce que toute fonction peut s'exprimer localement comme la somme d'une série de termes en loi de puissance des différentes variables (développement limité) et que chaque terme doit alors satisfaire l'analyse dimensionnelle.

– Combien doit-on choisir de dimensions indépendantes ? Généralement on en choisit 4 dans le Système International (SI anciennement MKSA, pour mètre, kilogramme, seconde et ampère). Mais c'est un choix relativement arbitraire. Deux dimensions sont indépendantes tant qu'il n'existe pas, dans le problème considéré, de lien physique entre ces deux dimensions. Par exemple masse et énergie ne sont plus des dimensions indépendantes en physique des particules puisque $E = mc^2$ (surtout si l'on fait $c = 1$!). Par contre chaleur et travail peuvent être deux dimensions indépendantes si dans le problème considéré il n'y a pas transformation entre les deux types d'énergie.

2.6 Notion de similitude

On dit que deux problèmes sont similaires s'ils sont gouvernés par les mêmes nombres sans dimension. Par exemple s'ils ont le même rapport d'aspect (même rapport de taille). Alors résoudre l'un des problèmes, c'est aussi résoudre l'autre. Prenons quelques exemples.

2.6.1 Similitude pour une maquette de navire

Le sillage d'un bateau et en particulier la traînée que l'eau exerce sur la coque peut être décomposée en plusieurs termes, en particulier la traînée de forme — caractérisé par le coefficient $C_D = f(Re)$ — et la traînée de vague — caractérisée par un coefficient $C_{vague} = f(Fr)$ où $Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}}$ est le nombre de Froude. La traînée de vague correspond à l'énergie transportée à l'infini par les ondes de surface. Pour faire une maquette en similitude, il conviendrait de choisir une échelle de réduction de toutes les dimensions géométriques et d'avoir le même nombre de Reynolds et le même nombre de Froude pour bien respecter la part relative de traînée de forme et de traînée de vague. Mais on vérifie aisément que c'est impossible, en tout cas en conservant l'eau comme fluide porteur et sans modifier $\bar{g}$! Lorsque l'on fait des essais de traction sur maquette en bassin d'essais de carène il convient de travailler soit en "similitude de Reynolds" soit en "similitude de Froude".

2.6.2 Pourquoi les enfants marchent-ils facilement pieds-nus sur les gravillons ?

Si on suppose les enfants et les adultes homothétiques, leur poids est proportionnel à leur volume L^3 alors que la surface des pieds est proportionnelle à L^2 . En conséquence la pression exercée par les gravillons sur la plante des pieds est proportionnelle à L . Plus on est grand, plus ça fait mal !

2.6.3 Pourquoi un animal de 50 m de haut ne peut-il exister sur Terre ?

Là aussi si on fait croître de façon homothétique (sans changer la forme) la taille d'un animal, son poids augmente comme L^3 alors que la section de ses fémurs par exemple croît comme L^2 . La contrainte de compression sur chaque fémur augmente donc comme L . S'il existe une contrainte maximale avant rupture de l'os, il existe une taille maximum pour cette espèce d'animaux.

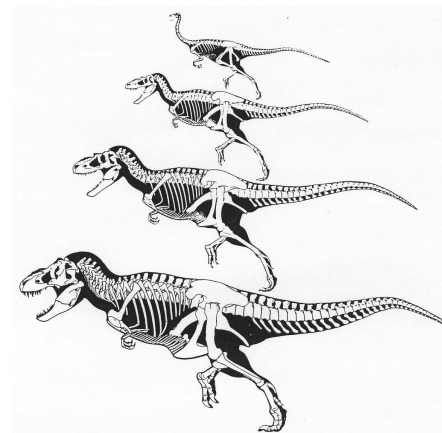


FIGURE 2.4 – Comparaison des tailles et donc des rapports d'aspect des squelettes de théropodes. Du plus petit au plus grand, un ornithomimus (165 kg), deux tyrannosaures (750 kg et 2500 kg) et un tyrannosaure rex (6000 kg). D'après [23] p. 126.

En l'occurrence, un fémur de mammouth n'est pas homothétique à un fémur de héron, et la figure 2.4 montre que les os de théropodes (dinosaures sans doute ancêtres des oiseaux) ne sont pas homothétiques lorsque l'on passe du plus petit (160 kg) au plus gros (6000 kg).

2.6.4 Pourquoi les animaux sautent-ils tous à peu près à la même hauteur ?

(D'après [27] p. 53 et [23] p. 209). Tous les animaux sautent de l'ordre de 1 mètres, et même si c'est 2m45 pour le champion Sotomayor ce n'est pas 10 mètres ni 10 centimètres. L'ordre de grandeur est donc le mètre. Et ceci est aussi vrai pour une puce qui saute de l'ordre de 400 fois sa hauteur. Pourquoi ?

Le poids varie comme L^3 et l'énergie mécanique à fournir pour atteindre une hauteur h est $E = mgh \sim L^3 h$. Or la force que peut développer un muscle, ici les cuisses, est au premier ordre proportionnel à sa section (L^2) alors que le travail W qu'il peut fournir est le produit de la force par le déplacement (ici la contraction du muscle proportionnel à sa longueur L), soit $W \sim L^2 \times L = L^3$. L'égalité $E = W$ conduit à une hauteur h de saut indépendante au premier ordre de la taille de l'animal L !

Au deuxième ordre, les puces sautent plutôt de l'ordre de 20 cm et les léopards de 2m50. On peut penser au frottement de l'air pour diminuer les performances des puces, mais le calcul montre que cela conduit seulement à une diminution de 10 %. Par contre l'accélération que peuvent supporter les animaux est peut-être en cause. En effet les animaux sauteurs comme les félins ont une poussée très longue (pattes arrières qui se déplient). Si les animaux sautent à la même hauteur h , ils ont la même vitesse de décollage V donné par $\frac{1}{2}mV^2 = mgh$. D'autre part la durée de la poussée est de

l'ordre de $\tau = L/V$. Leur accélération est donc $a \sim V/\tau \sim V^2/L \sim h/L$. En sautant à la même hauteur, les animaux ne subissent pas du tout la même accélération, les plus petits sont soumis à la plus forte accélération. On trouve pour une puce une accélération de l'ordre de $300g$ ce qui doit poser d'important problème aux structures internes !

2.6.5 Pourquoi les sociétés de fourmis n'ont-elles pas inventé le feu ?

On peut montrer que la combustion à l'air libre mets en jeu des processus de diffusion de l'oxygène qui font que la taille minimum d'une flamme est de l'ordre de 2 à 3 millimètres (c'est d'ailleurs visible au moment où une allumette s'éteint, la taille de la flamme ne diminue pas continuellement jusqu'à zéro). Et une fourmi ne peut pas s'approcher suffisamment d'une flamme si gigantesque à son échelle pour l'alimenter sans se brûler gravement. C'est peut-être pour cela qu'elles n'ont pas "inventé" le feu ! Plus sérieusement c'est pour le même genre de raison qu'une goutte d'eau est mortelle pour une fourmi et qu'elles ne se lavent qu'à sec en se frottant les pattes avec de la poussière. Un fois mouillées elles ne peuvent pas vaincre la tension de surface et sortir de la goutte comme on peut le voir dans le film "Microcosmos" de Francis Perrin.

Chapitre 3

Le théorème du transport

Sommaire

3.1	Notion de volume de contrôle	25
3.2	Théorème de Leibnitz	25
3.3	Théorème du transport d'une fonction scalaire	26
3.4	Conservation de la masse	26
3.4.1	Démonstration	27
3.4.2	Cas particulier d'un fluide incompressible.	27
3.5	Théorème du transport d'une fonction vectorielle	27
3.6	Application au transport de la quantité de mouvement	28
3.7	Application au sillage d'un cylindre	29
3.8	Transport de l'énergie	30

Nous allons maintenant présenter quelques théorèmes très puissants et utiles pour la mécanique des fluides. Ils sont basés sur les notions de volume de contrôle et de surface de contrôle et permettent d'écrire des équations de bilan, par exemple pour la masse, la quantité de mouvement ou l'énergie, sans avoir à connaître encore les équations locales de la mécanique des fluides.

3.1 Notion de volume de contrôle

Un *volume de contrôle* (VC) est un volume imaginaire limité par une *surface de contrôle* (SC). Le volume de contrôle peut être un volume fixe dans le référentiel du laboratoire, un volume toujours constitué des mêmes particules fluides, ou un volume ayant un déplacement arbitraire. On parle alors respectivement de *volume fixe*, *volume matériel* ou de *volume mobile*. Dans le cas d'un volume fixe, la vitesse de la surface de contrôle est nulle en tout point ($\vec{V}(\vec{r}, t) = \vec{0}$ si $\vec{r} \in SC$). Pour un volume matériel, la vitesse de la surface est égale en tout point à la vitesse locale du fluide ($\vec{V}(\vec{r}, t) = \vec{v}(\vec{r}, t)$ si $\vec{r} \in SC$).

3.2 Théorème de Leibnitz

Dans de nombreux cas on doit dériver une intégrale d'une fonction de plusieurs variables, dont les bornes dépendent de la variable de dérivation. Dans le cas d'une fonction scalaire dépendant d'une variable de temps et une d'espace on peut par exemple démontrer l'équation 3.1 :

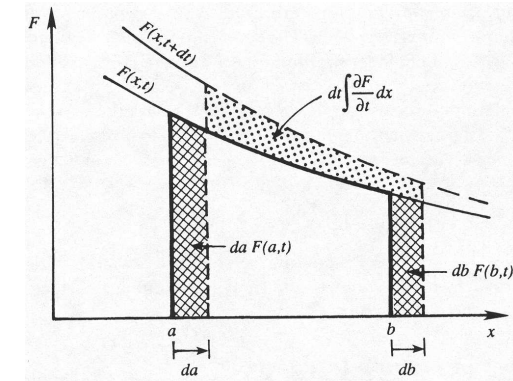


FIGURE 3.1 – Evolution de l'intégrale en x de la fonction f entre t et $t + dt$

Théorème de Leibnitz :

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx + f[b(t), t] \frac{db(t)}{dt} - f[a(t), t] \frac{da(t)}{dt} \quad (3.1)$$

On peut se convaincre de cette relation en observant la figure 3.1.

3.3 Théorème du transport d'une fonction scalaire

On peut ensuite généraliser à trois dimensions d'espace pour une fonction scalaire f (démonstration dans la référence [4] p. 78 à 86 par exemple) :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{VC(t)} f(\vec{r}, t) d\tau = \iiint_{VC(t)} \frac{\partial f}{\partial t} d\tau + \oint_{SC(t)} f(\vec{r}, t) \vec{V}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S}.$$

$\vec{V}(\vec{r}, t)$ est alors la vitesse de déplacement de la surface de contrôle au point considéré. Par exemple si le volume est fixe ce deuxième terme est nul.

En appliquant le théorème de Green-Ostrogradsky, le deuxième terme se transforme en une intégrale de volume et l'on obtient finalement le *Théorème du transport de Reynolds* :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{VC(t)} f(\vec{r}, t) d\tau = \iiint_{VC(t)} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div} (f \vec{V}) \right] d\tau. \quad (3.2)$$

3.4 Conservation de la masse

Nous allons montrer que la conservation de la masse conduit à une équation appelée *équation de continuité* qui s'écrit :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0} \quad (3.3)$$

Cette équation a la forme classique d'une loi de conservation. On peut introduire par exemple la quantité de mouvement par unité de volume (ou flux de masse) $\vec{j} = \rho \vec{v}$ et faire un parallèle avec la conservation de la charge électrique en électromagnétisme.

3.4.1 Démonstration

La masse dans un volume de contrôle s'écrit : $M_{VC(t)} = \int_{VC(t)} \rho(\vec{r}, t) d\tau$, où ρ est la masse volumique. Si VC est un volume de contrôle matériel emporté par l'écoulement, alors $\vec{V} = \vec{v}$ et s'il y a conservation de la masse (pas de réaction nucléaire par exemple) alors : $dM_{VC}/dt = 0$. Le théorème du transport de Reynolds nous donne alors pour $f = \rho$:

$$\frac{dM_{VC}}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{VC(t)} \rho(\vec{r}, t) d\tau = \iiint_{VC(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right] d\tau = 0.$$

On doit donc avoir pour tout VC matériel la relation suivante qui caractérise localement la conservation de la masse (écriture eulérienne) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0.$$

En développant le terme de divergence, $\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = \rho \operatorname{div}(\vec{v}) + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}(\rho)$ on peut écrire la forme lagrangienne de la conservation de la masse :

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div}(\vec{v}) = 0} \quad (3.4)$$

3.4.2 Cas particulier d'un fluide incompressible.

Pour un fluide incompressible, une particule fluide conserve son volume au cours du mouvement et donc sa masse volumique et on a donc $D\rho/Dt = 0$. En conséquence, *pour un fluide incompressible*, la conservation de la masse s'écrit simplement :

$$\boxed{\operatorname{div}(\vec{v}) = 0} \quad (3.5)$$

C'est en particulier vrai pour un fluide inhomogène en masse volumique, comme par exemple un fluide stratifié en densité. Le terme $\partial\rho/\partial t$ n'est pas forcément nul en un point mais $D\rho/Dt$ l'est.

Dans la suite, sauf mention contraire, nous ne traiterons que les cas des fluides incompressibles.

3.5 Théorème du transport d'une fonction vectorielle

Si la fonction du théorème du transport n'est plus scalaire mais vectorielle, on peut appliquer le théorème pour chacune de ses composantes et l'on trouve finalement :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{VC(t)} \vec{A}(\vec{r}, t) d\tau = \iiint_{VC(t)} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d\tau + \oint_{SC(t)} \vec{A}(\vec{r}, t) \left[\vec{V}(\vec{r}, t) \cdot \vec{d\vec{S}} \right].$$

Cela dit, le dernier terme n'est plus un scalaire et l'on ne peut donc plus utiliser directement le théorème de Green-Ostrogradsky. Nous verrons plus loin (§ 4.6) qu'il est possible de s'en sortir à condition de définir la divergence d'un tenseur qui sera... un vecteur !

3.6 Application au transport de la quantité de mouvement

La quantité de mouvement par unité de volume s'écrit $\rho \vec{v}$. Le théorème du transport d'une quantité vectorielle sur un volume *matériel* nous permet d'écrire

$$\frac{d}{dt} \iiint_{VC(t)} \rho \vec{v} d\tau = \iiint_{VC(t)} \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} d\tau + \oint_{SC(t)} \rho \vec{v} \left[\vec{v} \cdot \vec{d\vec{S}} \right].$$

Le principe fondamental de la dynamique, appliqué à ce volume de contrôle matériel nous permet d'écrire :

$$\sum \text{forces appliquées} = \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt},$$

où $\vec{P} = \int_{VC(t)} \rho \vec{v} d\tau$ est la quantité de mouvement totale du volume de contrôle. Si nous projetons cette équation vectorielle sur l'axe x_i ,

$$F_i = \frac{d}{dt} \iiint_{VC(t)} \rho v_i d\tau = \iiint_{VC(t)} \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} d\tau + \oint_{SC(t)} \rho v_i \left[\vec{v} \cdot \vec{d\vec{S}} \right]$$

et nous pouvons appliquer le théorème de Green-Ostrogradsky pour chaque composante :

$$F_i = \iiint_{VC(t)} \left(\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \operatorname{div} [v_i(\rho \vec{v})] \right) d\tau.$$

Mais $\operatorname{div} [v_i(\rho \vec{v})] = v_i \operatorname{div}(\rho \vec{v}) + \rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla}(v_i)$. En utilisant de plus la conservation de la masse, $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$, il vient :

$$F_i = \iiint_{VC(t)} \left(\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla}(v_i) \right) d\tau.$$

Soit pour le vecteur $\vec{F}$:

$$\vec{F}(t) = \iiint_{VC(t)} \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) d\tau.$$

L'opérateur $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})$ est le même que celui qui a été introduit dans l'équation 1.4 pour la dérivation lagrangienne.

Finalement en faisant apparaître l'accélération lagrangienne, la somme des forces appliquées à un volume de contrôle matériel s'écrit :

$$\boxed{\vec{F}(t) = \iiint_{VC(t)} \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} d\tau} \quad (3.6)$$

Cette équation est vraie même si le fluide est compressible (ρ variable), tant qu'il y a conservation de la masse.

3.7 Application au sillage d'un cylindre

A titre d'exercice nous pouvons utiliser cette équation de transport de la quantité de mouvement pour calculer la force de traînée $\vec{D}$ sur un cylindre infini dans un écoulement homogène dont la vitesse en amont est U_∞ (cf. [20] p. 86). Nous supposons l'écoulement stationnaire, incompressible et bidimensionnel (2C2D). Nous prendrons un volume de contrôle matériel (se déplaçant avec le fluide, $\vec{V} = \vec{v}$) limité par la surface du cylindre et un parallélépipède (PQRS) situé assez loin de l'obstacle (figure 3.2). En particulier nous supposons qu'en aval (sur QR) les lignes de courant sont redevenues parallèles à Ox et que la pression est revenue à sa valeur en amont P_∞ (ce qui suppose que le fluide est parfait ou du moins que les effets dissipatifs en l'absence d'obstacle sont faibles).

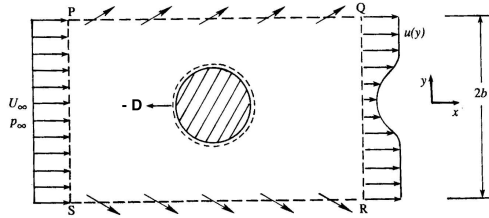


FIGURE 3.2 – Volume de contrôle (PQRS + cylindre) autour d'un obstacle cylindrique

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au volume de contrôle nous dit que :

$$\sum \vec{F}_{\text{appliquées}} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{VC} \rho \vec{v} d\tau.$$

Comme forces appliquées sur le fluide à la surface de contrôle nous avons les forces de pression, mais elles s'annulent entre l'amont et l'aval et le haut et le bas si la pression vaut partout P_∞ , et la force appliquée par le cylindre sur le fluide qui vaut $-\vec{D}$.

Le théorème du transport nous donne :

$$-\vec{D} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \iiint_{VC} \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} d\tau + \oint_{SC} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{d}\vec{S}).$$

Le premier terme du membre de droite est nul car l'écoulement est stationnaire. Projetons sur l'axe des x .

$$-D = \iint_P \rho v_x (\vec{v} \cdot \vec{d}\vec{S}) + \iint_Q \rho v_x (\vec{v} \cdot \vec{d}\vec{S}) + \iint_R \rho v_x (\vec{v} \cdot \vec{d}\vec{S}) + \iint_S \rho v_x (\vec{v} \cdot \vec{d}\vec{S}) + \iint_{\text{cylindre}} \rho v_x (\vec{v} \cdot \vec{d}\vec{S}).$$

La contribution correspondant à la surface du cylindre est nulle car le produit $\vec{v} \cdot \vec{d}\vec{S}$ y est nul, le cylindre étant supposé imperméable.

Dans la suite nous noterons L un élément de longueur fixe dans la direction transverse Oz .

Sur SP, $v_x = U_\infty$, sur QR, $v_x = U(y)$. Donc :

- $\iint_S^P \rho v_x (\vec{v} \cdot \vec{d}\vec{S}) = -2\rho b L U_\infty^2$. Le signe moins venant de la convention d'orientation sortante.
- $\iint_Q^R \rho v_x (\vec{v} \cdot \vec{d}\vec{S}) = \rho L \int_{-b}^{+b} U^2(y) dy$.

Par contre sur PQ et RS il existe une vitesse transverse $v_y \neq 0$ mais la vitesse longitudinale est proche de U_∞ si on est assez loin du cylindre. On en déduit :

- $\iint_P^Q \rho U_\infty (\vec{v} \cdot \vec{d}\vec{S}) = U_\infty \iint_P^Q \rho (\vec{v} \cdot \vec{d}\vec{S}) = U_\infty \dot{m}_{PQ}$ où $\dot{m}_{PQ}$ est le débit massique (masse s'échappant par seconde) à travers la surface PQ.
- $\iint_R^S \rho U_\infty (\vec{v} \cdot \vec{d}\vec{S}) = U_\infty \iint_R^S \rho (\vec{v} \cdot \vec{d}\vec{S}) = U_\infty \dot{m}_{RS}$ où $\dot{m}_{RS}$ est le débit massique à travers la surface RS.

Les quantités $\dot{m}_{PQ}$ et $\dot{m}_{RS}$ ne sont pas connues mais par contre la conservation de la masse permet d'écrire :

$$\dot{m}_{PQ} + \dot{m}_{QR} + \dot{m}_{RS} + \dot{m}_{SQ} = 0,$$

Soit

$$\dot{m}_{PQ} + \dot{m}_{RS} = -\dot{m}_{PS} - \dot{m}_{QR} = L \int_{-b}^b \rho [U_\infty - U(y)] dy.$$

Soit finalement :

$$-D = -2bL\rho U_\infty^2 + L\rho \int_{-b}^{+b} U^2(y) dy + U_\infty \left(L \int_{-b}^b \rho [U_\infty - U(y)] dy \right),$$

et donc :

$$D = \rho L \int_{-b}^b U(y) [U_\infty - U(y)] dy.$$

Cette équation permet de calculer la traînée sur un obstacle par une simple mesure expérimentale du profil transverse de vitesse loin en aval, donc sans avoir à instrumenter l'obstacle.

Effet de blocage : On suppose maintenant que l'expérience est faite dans une soufflerie un peu trop étroite. Les surfaces PQ et RS sont donc maintenant les parois de la soufflerie (pas de vitesse normale). La vitesse tangentielle sur ces parois vaut toujours U_∞ . Montrer qu'on a alors :

$$D = \rho L \int_{-b}^b [U_\infty^2 - U^2(y)] dy.$$

Pour éviter cet effet de blocage (mauvaise estimation de D à cause des survitesses de part et d'autre de l'objet) on considère qu'une soufflerie doit avoir une largeur supérieure à 10 fois le diamètre de l'obstacle.

3.8 Transport de l'énergie

Considérons un volume de contrôle de fluide. Si on note $\dot{W}$ le travail des forces agissant sur ce volume ou sur la surface de contrôle de ce volume, par unité de temps (c'est donc une puissance) et $\dot{Q}$ l'échange de chaleur correspondant par unité de temps, la thermodynamique nous dit que :

$$\frac{dU}{dt} = \dot{W} + \dot{Q}$$

où U est l'énergie interne du volume de fluide considéré,

$$U = \iiint_{VC(t)} e \, d\tau,$$

où e est la densité d'énergie, somme de l'énergie potentielle par unité de volume (par exemple $\rho g z$ pour l'énergie potentielle de gravité) et de l'énergie cinétique par unité de volume $\frac{1}{2}\rho v^2$. Le bilan macroscopique d'énergie s'écrit alors comme la variation locale de densité d'énergie plus le flux d'énergie à travers la surface de contrôle :

$$\dot{W} + \dot{Q} = \frac{d}{dt} \iiint_{VC(t)} e(\vec{r}, t) \, d\tau = \iiint_{VC(t)} \frac{\partial e}{\partial t} \, d\tau + \oint_{SC(t)} e(\vec{r}, t) \vec{V}(\vec{r}, t) \cdot \vec{dS}.$$

Chapitre 4

Le tenseur des contraintes

Sommaire

4.1	Notion de tenseur cartésien de rang 2	33
4.2	Le tenseur des contraintes $[\sigma]$ (<i>stress tensor</i>)	34
4.3	Symétries du tenseur des contraintes	35
4.4	Calcul de la contrainte dans une direction quelconque $\vec{\sigma}(\vec{n})$	35
4.5	Le tenseur des contraintes visqueuses $[\sigma']$	35
4.6	Principe fondamental de la dynamique et divergence de $[\sigma']$	36

4.1 Notion de tenseur cartésien de rang 2

Nous nous limiterons dans ce cours aux tenseurs cartésiens (décrits dans une base orthonormée fixe) sinon tout est bien plus compliqué !

Pour décrire les variations spatiales d'une fonction scalaire on doit calculer le vecteur gradient. De même pour décrire les variations spatiales d'une fonction vectorielle on peut calculer un *tenseur* particulier, le tenseur gradient, qui fait apparaître les composantes des vecteurs gradients de chacune de ses composantes.

On définit ainsi par exemple le tenseur des gradients de vitesse $[G]$ par

$$[G] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} = [G_{ij}] = \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right].$$

Ainsi chaque ligne de la matrice est constituée des composantes de $\vec{\nabla}(v_i)$.

Pour l'opérateur gradient d'un scalaire on a la relation : $dP = \vec{\nabla} P \cdot \vec{dl}$.

Pour le tenseur gradient on a la relation :

$$\vec{dv} = [G] \cdot \vec{dl}.$$

En effet

$$\{\vec{dv}\}_i = \{[G] \cdot \vec{dl}\}_i = \frac{\partial v_i}{\partial x} dx + \frac{\partial v_i}{\partial y} dy + \frac{\partial v_i}{\partial z} dz = \vec{\nabla}(v_i) \cdot \vec{dl} = dv_i.$$

Nous avons ici, avec $[G]$, un exemple de tenseur de rang 2 (il faut 2 indices pour énumérer les coefficients). Un tenseur de rang 1 correspond à un vecteur tandis qu'un tenseur de rang 0 est un scalaire. On peut aussi définir des tenseurs de rangs plus élevés (exemple pour décrire les variations spatiales d'un tenseur de rang 2).

4.2 Le tenseur des contraintes $[\sigma]$ (*stress tensor*)

On appelle *contrainte* la force de contact $\vec{\sigma}(\vec{n})$ qui s'applique sur une surface unité de normale $\vec{n}$ (figure 4.2). Si $\vec{n}$ est le vecteur unitaire, dirigé selon la normale sortante de cette surface (dans la direction du milieu qui applique la force de contact), la force s'exerçant sur une surface dS s'écrit :

$$\vec{df} = \vec{\sigma}(\vec{n})dS.$$

C'est la force de contact appliquée par le milieu supérieur (là où pointe $\vec{n}$) sur le milieu inférieur (là d'où sort $\vec{n}$) sur la surface $\vec{dS} = dS\vec{n}$.

Si on regarde les contraintes s'exerçant sur une des faces de surface unité d'un cube (figure 4.1), on a :

$$\vec{\sigma}(\vec{e}_2) = \sigma_{12}\vec{e}_1 + \sigma_{22}\vec{e}_2 + \sigma_{32}\vec{e}_3.$$

$\vec{\sigma}(\vec{e}_2)$ est un vecteur ayant trois composantes : σ_{22} représente la contrainte normale et σ_{12} et σ_{32} les deux composantes tangentielles.

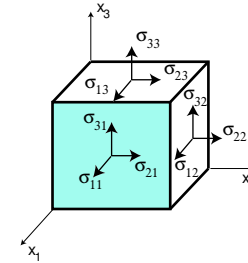


FIGURE 4.1 – Convention d'écriture des 9 termes du tenseur des contraintes.

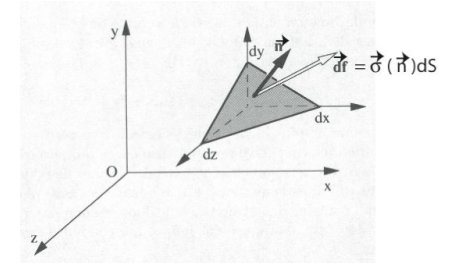


FIGURE 4.2 – Contrainte $\vec{\sigma}(\vec{n})$ dans une direction quelconque : $\vec{\sigma}(\vec{n}) = [\sigma] \cdot \vec{n}$.

Pour connaître l'état des contraintes sur n'importe quelle surface $\vec{dS}$, il suffit de connaître $\vec{\sigma}(\vec{e}_1)$, $\vec{\sigma}(\vec{e}_2)$ et $\vec{\sigma}(\vec{e}_3)$, soit finalement le tenseur des contraintes :

$$[\sigma] = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}.$$

Par convention dans σ_{ij} , i est le numéro de ligne du tenseur et la direction de la composante de la contrainte considérée et j est le numéro de colonne et la direction de la normale sortante. En effet on peut montrer que $\vec{\sigma}(\vec{n}) = [\sigma] \cdot \vec{n}$ (voir § 4.4).

4.3 Symétries du tenseur des contraintes

Deux propriétés de symétrie sont importantes pour écrire les contraintes et le tenseur des contraintes :

- Le principe de l'action et de la réaction nous permet d'écrire :

$$\vec{\sigma}(\vec{n}) = -\vec{\sigma}(-\vec{n}).$$

En effet la somme des forces appliquées à une surface de masse nulle est forcément nulle.

En conséquence, pour connaître les contraintes appliquées sur un volume cubique infiniment petit il suffit de connaître les contraintes $\vec{\sigma}(\vec{n})$ sur trois faces contiguës et donc de connaître $[\sigma]$. Sur deux faces opposées les contraintes sont égales et opposées au premier ordre.

- Le tenseur des contraintes est un tenseur symétrique : $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

En effet regardons les couples de rotation qui s'exercent sur un cube vis-à-vis de l'axe Oz par exemple :

$$d\Gamma_{Oz} = \|\vec{r} \wedge d\vec{f}\| = \sigma_{yx} dS_x dx - \sigma_{xy} dS_y dy = (\sigma_{yx} - \sigma_{xy}) d\tau.$$

Or le théorème du moment cinétique nous permet d'écrire $\Gamma_{Oz} = dI \frac{d^2\theta}{dt^2} \approx \rho d\tau r^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}$.

Donc $(\sigma_{yx} - \sigma_{xy}) \approx \rho r^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}$. Lorsque $r \rightarrow 0$ on doit donc avoir $\sigma_{yx} = \sigma_{xy}$ pour ne pas avoir une accélération angulaire infinie.

Le même raisonnement pour les axes Ox ou Oy montrent que le tenseur des contraintes est un tenseur symétrique :

$$\boxed{\sigma_{ij} = \sigma_{ji}}. \quad (4.1)$$

4.4 Calcul de la contrainte dans une direction quelconque $\vec{\sigma}(\vec{n})$

Connaissant le tenseur des contraintes $[\sigma]$ on peut connaître dans un milieu continu la contraintes s'exerçant sur n'importe quelle surface de normale $\vec{n}$. En effet on a la relation (figure 4.2) :

$$\vec{\sigma}(\vec{n}) = [\sigma] \cdot \vec{n} = \sigma_{ij} n_j. \quad (4.2)$$

Nous avons utilisé la *convention de sommation d'Einstein* : dès que des indices apparaissent deux fois dans une expression, le signe $\sum$ sur cet indice n'est pas écrit pour simplifier mais il est implicite. Par exemple $a_{ii} \equiv \sum_{i=1}^3 a_{ii}$ et $\delta_{ii} = 3$, où δ_{ij} est le symbole de Kroneker qui vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon.

On peut vérifier la propriété (4.2) en faisant par exemple $\vec{n} = \vec{e}_i$ ou bien faire la démonstration complète (voir Ref. [4] p. 108 ou [15] p. 138).

Exercice : Démontrer la propriété précédente à 2 dimensions.

4.5 Le tenseur des contraintes visqueuses $[\sigma']$

Considérons le cas d'un fluide au repos, c'est-à-dire en l'absence d'écoulement. Dans ce cas de l'hydrostatique, c'est-à-dire dans le cadre de la thermodynamique à l'équilibre, l'isotropie des contraintes impose d'une part qu'il n'y ai que des contraintes normales (pas de contraintes tangentielles) et d'autre part qu'elles soient toutes égales en module. On appelle « pression » le scalaire p tel que $d\vec{f} = -p d\vec{S}$. Sans écoulement on peut donc écrire $\sigma_{ij} = -p \delta_{ij}$.

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} = -p[I]$$

où $[I]$ est le tenseur identité aussi appelé tenseur de Kroneker $[\delta]$ car $[I] = [\delta_{ij}]$.

On notera que, quelque soit le vecteur $\vec{n}$, on a $\vec{\sigma}(\vec{n}) = [\sigma] \cdot \vec{n} = -p[I] \cdot \vec{n} = -p\vec{n}$. Les contraintes sont donc normales aux surfaces et isotropes dans un fluide au repos (équilibre thermodynamique).

Dans le cas où il y a un écoulement (thermodynamique hors équilibre) on définit le tenseur des contraintes visqueuses $[\sigma']$ par la relation :

$$[\sigma] = -p[I] + [\sigma'].$$

$[\sigma']$ est évidemment le tenseur nul s'il n'y a pas d'écoulement, ou plus généralement s'il n'existe pas d'autres forces que les forces de pression (ce sera le cas des fluides parfaits qui sont supposés sans viscosité). Ce tenseur $[\sigma']$ caractérise les forces d'origine visqueuse qui apparaissent sous écoulement.

Notons que $[\sigma]$ ou $[\sigma']$ ne décrivent que les forces de contact (ou de surface, forces à courtes portées) et pas des forces de volumes (forces à longues portées) comme la gravité par exemple.

4.6 Principe fondamental de la dynamique et divergence de $[\sigma']$

Nous avons démontré (équation 3.6) que pour un volume de contrôle matériel on a la relation :

$$\sum \vec{F} = \iiint_{VC} \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} d\tau.$$

Nous allons maintenant décomposer les forces appliquées en forces de volume $\sum \vec{F}_{VC}$ et en forces de surface $\sum \vec{F}_{SC}$. Soit : $\sum \vec{F} = \sum \vec{F}_{VC} + \sum \vec{F}_{SC}$. Pour les forces volumiques nous introduirons les forces par unités de masse (donc homogène à des accélérations) que nous noterons $\vec{g}$ car souvent ce sera l'accélération de la gravité, mais en principe le terme $\vec{g}$ pourra représenter n'importe quelle force de volume (force magnétique, électrostatique, force de Laplace, pseudo-forces d'inertie, etc).

$$\sum \vec{F}_{VC} = \iiint_{VC} \rho \vec{g} d\tau.$$

Pour les forces de surface nous avons par définition :

$$\sum \vec{F}_{SC} = \oint_{SC} \vec{\sigma}(\vec{n}) dS = \oint_{SC} [\sigma] \cdot \vec{n} dS = \oint_{SC} [\sigma] \cdot d\vec{S}.$$

Or $\vec{\sigma}(\vec{n}) = [\sigma] \cdot \vec{n} = \sigma_{ij} n_j$, donc si on projette l'équation précédente sur l'axe des i , il vient :

$$\left\{ \oint_{SC} [\sigma] \cdot d\vec{S} \right\}_i = \oint_{SC} \vec{L}_i \cdot d\vec{S} = \iiint_{VC} \text{div}(\vec{L}_i) d\tau = \iiint_{VC} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} d\tau.$$

Car c'est le flux d'un vecteur $\vec{L}_i$ de composantes $\vec{L}_i = (\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3})$ (L pour "ligne" car ses composantes sont les coefficients d'une ligne du tenseur des contraintes) à travers la surface $d\vec{S}$.

Donc si on regroupe les forces de volume et les forces de surface, on a pour la composante i :

$$\sum F_i = \iiint_{VC} [\rho g_i + \text{div}(\vec{L}_i)] d\tau.$$

Ce que l'on peut encore écrire sous une forme compacte vectorielle :

$$\sum \vec{F} = \iiint_{VC(t)} [\rho \vec{g} + \vec{\text{div}}[\sigma]] d\tau,$$

à condition de définir un nouvel opérateur, la divergence d'un tenseur, qui est un *vecteur* (attention !) donc chaque composante est la divergence du vecteur ligne correspondant : $\{\vec{\text{div}}[\sigma]\}_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$.

En introduisant l'expression $[\sigma] = -p[I] + [\sigma']$ on en déduit que

$$\{\vec{\text{div}}[\sigma]\}_i = -\frac{\partial(p\delta_{ij})}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j}$$

soit

$$\vec{\text{div}}[\sigma] = -\vec{\nabla}(p) + \vec{\text{div}}[\sigma'].$$

Finalement en rassemblant tous les termes :

$$\sum \vec{F} = \iiint_{VC} \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} d\tau = \iiint_{VC} [-\vec{\nabla}(p) + \rho \vec{g} + \vec{\text{div}}[\sigma']] d\tau,$$

quelque soit le volume de contrôle et donc au niveau local :

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla}(p) + \rho \vec{g} + \vec{\text{div}}[\sigma']}. \quad (4.3)$$

Cette équation est la forme locale du Principe Fondamentale de la Dynamique. Elle est exacte pour tous les fluides, compressible ou incompressible, visqueux ou non visqueux du moment qu'ils conservent leur masse. L'étape suivante est d'exprimer la *relation constitutive*, c'est-à-dire la relation entre le tenseur des contraintes visqueuses $[\sigma']$ et le tenseur des gradients de vitesse $[G]$. Nous établirons cette relation dans le chapitre 7 pour un fluide dit "newtonien". L'équation obtenue portera alors le nom d'équation de Navier-Stokes.

Dans le chapitre 6 nous allons étudier le cas idéal où l'on néglige les contraintes visqueuses ($[\sigma'] = 0$). On a alors l'équation de la dynamique suivante :

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} \right] = -\vec{\nabla}(p) + \rho \vec{g}}. \quad (4.4)$$

Cette équation est appelée équation d'Euler du nom du mathématicien suisse du XVIIIème siècle que l'a établie. Cette équation gouverne l'écoulement des fluides sans viscosité que l'on appelle *les fluides parfaits*.

Chapitre 5

Hydrostatique

Version du 1^{er} juillet 2010

Sommaire

5.1	Equilibre de la pression dans le champ de pesanteur	40
5.1.1	Cas d'un fluide de masse volumique constante	41
5.1.2	Cas d'un fluide de masse volumique variable	43
5.1.3	Cas d'une atmosphère adiabatique	44
5.2	Equilibre de la pression dans un référentiel non galiléen	45
5.3	La poussée d'Archimède	45
5.3.1	Le poisson et le ludion	46
5.4	Equilibre des corps flottants	47
5.4.1	Centre de carène	47
5.4.2	Notion de métacentre	49

Un cas apparemment très simple qu'il faut pourtant savoir résoudre est le cas où il n'y a pas d'écoulement. Dans ce cas $\vec{v} = \vec{0}$ partout puisque le fluide est "statique" et d'autre part le tenseur des contraintes visqueuses $[\sigma'] = [0]$ car par définition il n'apparaît que sous écoulement (voir la discussion sur ce point au § 4.5 page 35, et nous omettons ici le cas des fluides à seuil qui ont des comportements solides à faible contrainte). L'équation de Navier-Stokes, issue du principe fondamental de la dynamique (Equ. 4.3 page 37), devient alors simplement :

$$\vec{\nabla}(p) = \rho \vec{g}. \quad (5.1)$$

C'est l'équation de l'hydrostatique qui relie localement le gradient de la pression aux forces volumiques par unité de volume (ici simplement noté $\vec{g}$).

Rappelons que la pression dans ce cas est la seule contrainte existant sur une surface élémentaire et que son origine microscopique est l'impulsion transmise lors des collisions par les molécules du fluide (gaz ou liquide). Elle augmente avec l'agitation thermique et donc avec la température à volume constant. Dans le cas hydrostatique la pression au sein du fluide est une grandeur thermodynamique à l'équilibre.

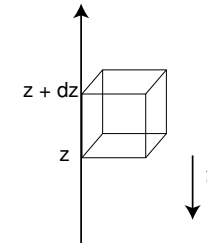


FIGURE 5.1 – Volume élémentaire de gaz en équilibre hydrostatique.

Sur une surface quelconque on calcule la force appliquée par la relation : $\vec{df} = -p dS \vec{n}$ ou plus simplement

$$\vec{df} = -p \vec{dS}.$$

C'est la force appliquée par le fluide vers lequel se dirige le vecteur $\vec{n}$ sur le milieu d'où sort $\vec{n}$.

L'unité officielle de pression dans le Système International (SI) est le Pascal (Pa), c'est-à-dire 1 Newton par mètre carré : $1 Pa = 1 N/m^2$. Cette valeur est très faible comparée à la pression atmosphérique. On utilise donc souvent son multiple l'hectopascal (1 hPa = 100 Pa). La pression atmosphérique moyenne au niveau de la mer vaut alors par définition 1 atm = 1013,250 hPa.

Il existe toutefois un très grand nombre d'autres unités de pression encore utilisées, dont l'usage est déconseillé en physique :

- Le bar. Par définition 1 bar = 10^5 Pa.
- L'atmosphère : 1 atm = 1013,250 hPa.
- Le torr, en hommage à TORRICELLI et à son manomètre à mercure : 1 torr = 1 mm de mercure, et donc par définition 760 torr = 1 atm.
- Le $kg/m^2 \approx 10^5$ Pa sur Terre.
- Le PSI, unité anglo-saxonne utilisées par exemple pour régler la pression des pneus de vélo. C'est l'abréviation de "Pound per Square Inch", la livre par pouce carré valant ... 45,965 Pa sur Terre.

5.1 Equilibre de la pression dans le champ de pesanteur

Considérons un fluide au repos. Chaque particule fluide est en équilibre. Considérons une particule fluide cubique dont les faces basse et haute sont respectivement à l'altitude z et $z + dz$, c'est-à-dire que nous considérons l'axe Oz dirigé vers le haut et donc opposé au sens de l'accélération de la gravité $\vec{g}$ (figure 5.1). Les forces de pression sur chaque face s'écrivent $\vec{df} = -p \vec{dS}$ avec $\vec{dS}$ dirigé vers l'extérieur du cube (normale sortante).

L'équilibre des forces horizontales (ici uniquement de pression) s'écrit : $df_x(x) + df_x(x + dx) = 0$. Soit $p(x)dx - p(x + dx)dx = -\frac{\partial p}{\partial x} dx dx = 0$. Et finalement $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$. De même on trouve $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$.

L'équilibre des forces verticales de pression et de gravité s'écrit :

$$df_z(z) + df_z(z + dz) - \rho d\tau g = 0,$$

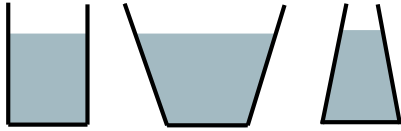


FIGURE 5.2 – Paradoxe de Stevin : La pression au fond de ces trois récipients est-elle la même ? Oui ? Pourtant la pression exercée par chacun de ces verres sur le sol est différente. Comment est-ce possible ?

où par convention $\|\vec{g}\| = g > 0$. Soit

$$p(z)dS - p(z+dz)dS - \rho dS dz g = - \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \right) dS dz = 0.$$

Et finalement

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

On peut donc écrire sous forme vectorielle : $\vec{\nabla} p = \rho \vec{g}$. On retrouve donc logiquement la relation (5.1) que nous avons simplement déduite de l'équation d'Euler en faisant $\vec{v} = \vec{0}$.

5.1.1 Cas d'un fluide de masse volumique constante

Si le fluide est incompressible ρ ne dépend pas de la pression p . Si de plus le fluide est de masse volumique homogène (indépendante de la position) alors l'équation de la pression s'intègre facilement et l'on trouve :

$$p(z) = p(0) - \rho g z.$$

Avec z dirigé vers le haut (si z était dirigée vers le bas un signe $+$ remplace le signe $-$). La pression dans le fluide diminue avec l'altitude et augmente avec la profondeur. Par exemple en mer, si on choisit $z = 0$ en surface $p(0) = p_{atm}$ et z dirigé vers le bas $p(z) = p_{atm} + \rho g z$. En plongée, à une profondeur de l'ordre de 10 m la pression est égale à deux fois la pression atmosphérique. En apnée le volume de vos poumons est donc pratiquement diminué de moitié ! Par 3200 m de profondeur au large de la Galice, l'épave du tanker "Prestige" est soumise à une pression de 321 fois la pression atmosphérique soit une force équivalente à 3210 tonnes par m^2 de coque.

Nota : On appelle parfois *pression statique* la quantité $p^* = p(z) \pm \rho g z$. Cette quantité reste constante partout dans un fluide en équilibre hydrostatique.

• Applications :

- Paradoxe de Stevin : PASCAL a montré que la pression au fond d'un récipient ne dépend que de la hauteur d'eau et pas de la forme du récipient (figure 5.2). Pourtant la masse de liquide dans chaque récipient est différente et le poids du récipient est réparti sur la même surface. Pouvez-vous expliquer ce paradoxe, appelé paradoxe de Stevin du nom de l'ingénieur flamand Simon STEVIN (1548-1620) de Brugge qui l'a imaginé.
- Le siphon : La figure 5.3 représente un tuyau reliant les deux récipients. Expliquer pourquoi une fois amorcé ce siphon permet de vider le récipient le plus haut dans le récipient le plus bas. Au XVIIème siècle l'explication courante était encore que "la nature a horreur du vide". Pascal a montré qu'un siphon peut pourtant fonctionner à la pression atmosphérique en utilisant deux

liquides de densité différente (par exemple de l'eau salée et colorée et de l'eau pure) (figure 5.4).

- Manomètre en "U" : Dans un tel manomètre rempli d'un liquide (en gris sur la figure 5.5) on mesure la différence de hauteur h entre les deux branches qui donne la différence de pression : $P_B - P_A = \rho_{gris} g h$.
- Vérin hydraulique : Un vérin hydraulique est basé sur le fait qu'un liquide au repos transmet *intégralement* la pression et pas les forces. La figure 5.6 montre un vérin rempli d'huile fermé par deux bouchons étanches de surface S_A et S_B . Comme les pressions en A et B sont proches (h petit), si $S_A \gg S_B$ alors $F_A = P_A S_A \gg F_B = P_B S_B$. On réalise ainsi une très forte démultiplication. Avec un tel vérin un mécanicien peut soulever à la main un Airbus pour changer une roue du train d'atterrissage. C'était aussi le principe des premiers ascenseurs hydrauliques fonctionnant à la pression de l'eau de la ville. Par contre avec un tel système les travaux sont égaux en effet $W_A = \vec{F}_A \cdot \vec{\Delta l}_A = P_A S_A \Delta l_A$. Comme $S_A \Delta l_A = S_B \Delta l_B$ on a $W_A = W_B$ si $h \approx 0$. Il faut donc beaucoup de coup de pompe sur le vérin pour soulever un Airbus !

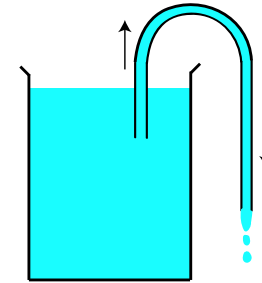


FIGURE 5.3 – Schéma d'un siphon

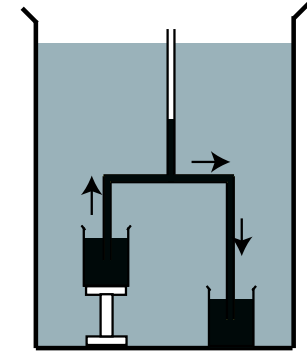


FIGURE 5.4 – Siphon à deux liquides de Pascal

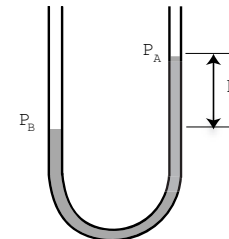


FIGURE 5.5 – Schéma d'un manomètre en "U"

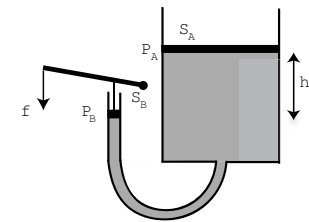


FIGURE 5.6 – Schéma d'un vérin hydraulique

- Baromètre à mercure : La figure 5.7 représente l'expérience historique de TORRICELLI de 1644 réalisée à Florence. Au niveau de la mer lorsque $h > 760$ mm un espace vide apparaît dans le haut d'un tube rempli de mercure (le "vif-argent" à l'époque) puis retourné dans un bac de mercure. La hauteur de mercure dans le tube varie légèrement de jour en jour (variation de la pression atmosphérique) et en altitude (1 cm de moins au sommet de la tour de Pise). En toute rigueur on n'obtient pas le vide mais la phase gazeuse du liquide utilisé à sa pression de vapeur saturante pour la température de l'expérience. Dans le cas du mercure cette pression de vapeur saturante est très faible et Torricelli a donc bien été la première personne à réaliser le vide. Ce résultat a mis longtemps à être accepté par la communauté et PASCAL a refait en 1646 cette expérience le long d'une des tours d'une église de Rouen avec un long tube rempli de vin !

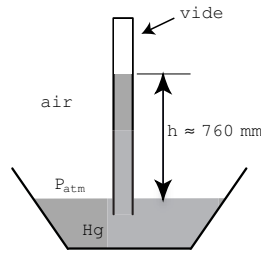


FIGURE 5.7 – Expérience de Torricelli permettant la première mesure de la pression atmosphérique.

- Expérience du "crève-tonneau" de Pascal. On raconte que Pascal s'était déclaré capable de faire exploser n'importe quel tonneau avec un long et mince tuyau et un verre d'eau.

5.1.2 Cas d'un fluide de masse volumique variable

L'atmosphère et l'océan sont des exemples de fluides dont la densité varie avec l'altitude. C'est ce que l'on appelle des fluides stratifiés dont nous reparlerons dans le chapitre ?? page ??.

Cas général :

Pour un fluide compressible la masse volumique est variable. En général il existe une équation d'état thermodynamique pour ce fluide, par exemple $f(p, V, T) = 0$ ce qui veut dire que $\rho = \rho(p, T)$. Dans ce cas l'équation 5.1 devient : $\vec{\nabla}(p) = \rho(p, T)\vec{g}$ où $\vec{g}$ représente l'accélération des forces volumiques (pas forcément uniquement l'accélération de la gravité). Pour que le membre de droite de cette équation dérive d'un gradient il faut que $\text{rot}(\rho\vec{g}) = 0$ soit :

$$\rho \vec{\text{rot}}(\vec{g}) + \vec{\nabla}\rho \wedge \vec{g} = 0.$$

Si les forces volumiques sont conservatives, elles dérivent d'un potentiel et $\vec{g} = \vec{\nabla}(\phi)$. On a alors $\vec{\text{rot}}\vec{g} = 0$ et il suffit pour avoir un équilibre hydrostatique que $\vec{\nabla}\rho \wedge \vec{g} = 0$, soit $\vec{\nabla}\rho$ parallèle à $\vec{\nabla}\phi$ c'est-à-dire que les isochores ($\rho(p, T) = \text{Cste}$) soit aussi des isopotentiels ($\phi = \text{Cste}$). Si $\vec{g}$ est vertical, les isobares sont horizontales, et il y a équilibre hydrostatique si les surfaces isochores sont aussi horizontales.

Cas d'un fluide barotrope (cas d'une atmosphère isotherme) :

Si l'on suppose ici que ρ ne dépend que de la pression et pas de la température (ou alors que $T = \text{Cste}$) ce que l'on nomme un fluide barotrope : alors $\rho = f(p)$ et les isochores sont aussi des isobares. Il faut intégrer l'équation caractérisant l'équilibre de la masse de fluide : $\vec{\nabla}p = \rho(p)\vec{g}$. Que l'on peut réécrire :

$$dp = \vec{\nabla}p \cdot \vec{dl} = \rho(p)\vec{g} \cdot \vec{dl}$$

soit avec z dirigé vers le haut :

$$\int_0^z \frac{dp}{\rho(p)} = -gz.$$

Prenons le cas de l'atmosphère terrestre supposé isotherme. Si l'on suppose que le gaz satisfait à l'équation d'état des gaz parfaits $pV = nRT$ alors $\rho = \frac{m}{V} = n \frac{M}{V} = \frac{Mp}{RT}$ où M est la masse molaire du gaz. L'équilibre du gaz s'écrit alors :

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} dz = -\frac{dz}{\lambda}$$

avec $\lambda = RT/Mg$. Ce qui donne, si on néglige logiquement les variations de g avec l'altitude, une variation exponentielle de la pression avec l'altitude $p(z) = p(0) \exp(-\frac{z}{\lambda})$ avec $\lambda \approx 8000$ m. Les résultats sont légèrement modifiés dans l'atmosphère réelle qui est non isotherme car en altitude l'air est plus froid donc plus dense. A 5000 mètres la pression de l'air a diminué environ de moitié, ce qui explique le manque d'oxygène ressenti par les alpinistes en haute montagne. Toutefois cette longueur caractéristique de décroissance de la pression étant grande, on pourra toujours en hydrostatique à l'échelle du laboratoire négliger la compressibilité des gaz.

5.1.3 Cas d'une atmosphère adiabatique

Une atmosphère est stable d'une part si elle est en équilibre hydrostatique (Equ. 5.1) et d'autre part si cet équilibre est stable. Pour tester la stabilité il faut imaginer le déplacement vers le haut d'une petite masse d'air et montrer que la force de rappel est stabilisante, c'est-à-dire que la nouvelle masse volumique de la masse d'air est plus forte que la masse volumique du fluide environnant. En supposant que le déplacement d'une particule fluide de dz vers le haut se fait de façon adiabatique (sans échange de chaleur) l'atmosphère marginale sera l'atmosphère adiabatique où partout la force de rappel sera nulle. Etudions cette atmosphère adiabatique.

Calculons $(d\rho/dz)_{adia}$ en considérant par exemple le fluide comme un gaz parfait, on plutôt calculons $(dT/dz)_{adia}$ ce qui s'avère plus simple.

On a $pV^\gamma = \text{Cste}$ soit $\rho/\rho_0 = (p/p_0)^{1/\gamma}$ ou $T/T_0 = (p/p_0)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$. En calculant la dérivée logarithmique de cette dernière relation il vient :

$$\frac{dT}{T} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{dp}{p},$$

soit

$$\frac{dT}{dz} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{T}{p} \frac{dp}{dz}.$$

En reportant dans (Equ. 5.1) :

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\rho T}{p} g.$$

En utilisant le fait que $pM = \rho RT$, que $\gamma = c_p/c_v$ et que $c_p - c_v = R/M$ il vient donc

$$\left(\frac{dT}{dz}\right)_{adia} = -g/c_p \approx -9,8K/km.$$

Une atmosphère réelle sera stable si en chaque point sa température décroît moins vite que celle d'une atmosphère adiabatique.

5.2 Equilibre de la pression dans un référentiel non galiléen

Nous avons jusqu'à présent fait les calculs de pression dans le cas où la seule force volumique est la force de gravité. Mais les équations sont les mêmes pour n'importe quelle force volumique (par exemple la force de Laplace pour un fluide conducteur ou la force magnétique pour un fluide magnétique appelé ferrofluide) mais aussi pour n'importe quelle pseudo-force apparaissant dans un référentiel non galiléen. Dans le cas général il faudra écrire : $\vec{\nabla} p = \rho(\vec{g} - \vec{a}_e - \vec{a}_c)$ c'est-à-dire que le gradient de pression est colinéaire à la *gravité apparente*. L'accélération d'entraînement $\vec{a}_e$ s'écrit comme la somme de l'accélération de l'origine du référentiel relatif O' , de l'accélération angulaire et de l'accélération centrifuge, et où $\vec{a}_c$ est l'accélération de Coriolis :

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\vec{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r})$$

$$\vec{a}_c = 2(\vec{\Omega} \wedge \vec{v}).$$

Comme le fluide est au repos dans le référentiel relatif (hydrostatique) la force de Coriolis est nulle et de même la vitesse angulaire doit être constante. Si ρ est constant on peut écrire les termes restant sous la forme d'un gradient et l'on obtient :

$$\vec{\nabla} \frac{p}{\rho} = \vec{\nabla}(-gz) - \vec{\nabla} \left(\frac{d^2\vec{OO'}}{dt^2} \cdot \vec{r} \right) - \frac{1}{2} \vec{\nabla} (\vec{\Omega} \wedge \vec{r})^2.$$

Soit

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{d^2\vec{OO'}}{dt^2} \cdot \vec{r} - \frac{1}{2} (\vec{\Omega} \wedge \vec{r})^2 = 0.$$

Finalement, le gradient de pression est colinéaire à la "gravité apparente".

Nota : Si l'axe de rotation n'est pas vertical, dans le référentiel tournant $\vec{g}$ n'est plus un vecteur de direction constante et le fluide n'est donc plus au repos.

• Exercices :

- Trouver la forme de la surface libre d'un récipient plein d'eau ayant un mouvement horizontal rectiligne uniformément accéléré avec $a = g/10$.
- Trouver la forme de la surface libre d'un récipient plein d'eau de forme quelconque en rotation uniforme autour d'un axe vertical à la vitesse angulaire $\Omega = 10$ rad/s.

5.3 La poussée d'Archimède

Considérons l'action des forces de pression appliquées sur un volume totalement immergé dans un liquide. Notons que ce calcul est un cas particulier du calcul général des forces s'exerçant sur une

particule fluide (voir § 4.6). Sur chaque élément de surface nous avons la force normale de pression : $d\vec{f} = -p dS \vec{n}$. Rappelons que par convention, $\vec{n}$ est la normale à la surface dS et cette expression donne alors la force appliquée par le milieu où *pointe* la normale sur le milieu d'où sort la normale. La force totale du fluide environnant sur la surface S limitant le volume V est alors :

$$\vec{F} = \vec{F}_S = \oint_S d\vec{f} = - \oint_S p dS \vec{n} = - \oint_S p d\vec{S}.$$

Calculons la projection de cette force sur n'importe quelle direction, par exemple $\vec{e}_x$:

$$F_x = \vec{F} \cdot \vec{e}_x = - \oint_S (p \vec{e}_x) \cdot d\vec{S}.$$

En appliquant le théorème de la divergence (Green-Ostrogradsky) : $F_x = - \iiint_V \text{div}(p \vec{e}_x) d\tau$. Or $\text{div}(p \vec{e}_x) = \frac{\partial p}{\partial x}$, donc $F_x = - \iiint_V \frac{\partial p}{\partial x} d\tau$. En refaisant le calcul pour les directions $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ on obtient :

$$\vec{F} = - \iiint_V \vec{\nabla}(p) d\tau.$$

Si maintenant le fluide est au repos, c'est-à-dire en équilibre hydrostatique dans le champ de gravité nous avons : $\vec{\nabla}(p) = \rho_{fluide} \vec{g}$ donc :

$$\vec{F} = - \iiint_V \rho_{fluide} \vec{g} d\tau = -\vec{g} \iiint_V \rho_{fluide} d\tau = -m_f \vec{g},$$

où m_f est la masse de fluide qu'occuperait ce volume V . C'est le célèbre théorème d'Archimède :

Tout corps plongé dans un liquide reçoit de la part de celui-ci une poussée dirigée de bas en haut, égale au poids du volume du liquide déplacé.

La démonstration est valable également pour un fluide stratifié où la masse volumique dépend de l'altitude. C'est cette force qui fait s'envoler un ballon gonflé à l'hélium, remonter une bulle d'air dans l'eau ou flotter un tronc d'arbre.

La poussée d'Archimède est aussi à l'origine de la dynamique atmosphérique, océanique et tellurique.

Exercices :

- Expliquer pourquoi un cube plus léger que l'eau peut rester posé au fond d'un récipient plein d'eau à condition d'être bien lisse. A quel condition va-t-il remonter ?
- Une balle de ping-pong flotte à la surface d'un seau d'eau placé dans un ascenseur. L'ascenseur démarre, que se passe-t-il pour la balle ?

5.3.1 Le poisson et le ludion

Si le poids est supérieur à la poussée d'Archimède, l'objet coule, si c'est le contraire il s'élève. On appelle *poids apparent* la somme du poids et de la poussée d'Archimède. Un ballon dirigeable ou une montgolfière en équilibre ont un poids apparent nul.

On peut se demander comment font les poissons pour flotter entre deux eaux ? Eux aussi compensent exactement leur poids par la poussée d'Archimède. Pour cela ils changent leur volume en gonflant plus ou moins leur vessie natatoire remplie d'air. En augmentant la pression de l'air dans cet organe ils diminuent de volume, augmentent leur poids apparent et descendent. Ils remontent en décompressant le même volume d'air.

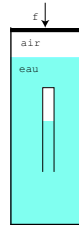


FIGURE 5.8 – Schéma de principe d'un ludion

Le *ludion* est un jouet basé sur le même principe. Un tube scellé en haut (par exemple un tube de stylo Bic vide, bouché en haut à la pâte à modeler et lesté en bas par un trombone pour qu'il reste vertical) contient juste la quantité d'air nécessaire pour le faire flotter. On le place dans un récipient d'eau fermé déformable (par exemple une bouteille en plastique ou un tube fermé par une membrane déformable (figure 5.8)). En comprimant la bouteille on augmente la pression de l'eau à l'intérieur ce qui diminue le volume d'air dans le ludion et cause sa lente descente vers le fond. Le but du jeu étant de le maintenir le plus longtemps possible entre deux eaux.

Un sous-marin lui aussi annule son poids apparent mais cette fois sans changer de volume. Il augmente sa masse totale en vidant l'air de ses ballasts et en les remplissant d'eau. Il remonte vers la surface en purgeant ses ballasts, c'est-à-dire en y injectant à nouveau de l'air venant de ses réserves d'air comprimé.

5.4 Equilibre des corps flottants

Un navire flotte à la surface entre l'air et l'eau lorsque son poids est équilibré par la poussée d'Archimède sur son volume immergé (la poussée d'Archimède de l'air est négligeable devant celle de l'eau). Ce qui compte c'est bien le volume immergé et non la masse volumique. On arrive même à faire flotter des bateaux taillés dans du granit ! Si une personne monte sur une petite embarcation, la coque s'enfonce jusqu'à ce que le volume supplémentaire immergé équilibre exactement son poids. Du coup la mesure du poids d'un navire (souvent nommé *déplacement* en terme de marine) est équivalente à la mesure de son volume immergé et les cargos possèdent à cet effet des graduations à différents endroits sur la coque pour pouvoir déduire leur masse totale de la position de leur ligne de flottaison (il existe même des graduations pour l'eau douce et d'autres pour l'eau de mer).

Mais pour que l'équilibre soit stable et que le bateau flotte à l'endroit, il ne suffit pas que les deux forces soient égales et opposées. Il faut encore que le moment de ces forces soient égaux et opposés. Le poids est une force qui s'applique au centre de masse de l'objet considéré mais qu'en est-il de la force de flottaison ?

5.4.1 Centre de carène

La poussée d'Archimède est l'intégrale des forces de surface. On peut aussi calculer son point d'application que l'on appelle *centre de poussée* ou *centre de carène* et que nous noterons C. Par

définition du centre de poussée C on a :

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \oint \vec{OM} \wedge d\vec{f} = \vec{OC} \wedge \vec{f}_{Archim}.$$

En ce point C le moment des forces de pression est donc nul par définition.

Calculons tout d'abord le moment des forces de pression sur toute la surface immergée par rapport à un point O.

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \oint \vec{OM} \wedge d\vec{f} = - \oint p \vec{OM} \wedge d\vec{S}.$$

Le formulaire nous permet de transformer cette dernière intégrale de surface en intégrale de volume :

$$- \oint p \vec{OM} \wedge d\vec{S} = \iiint \vec{rot}(p \vec{OM}) d\tau.$$

Comme

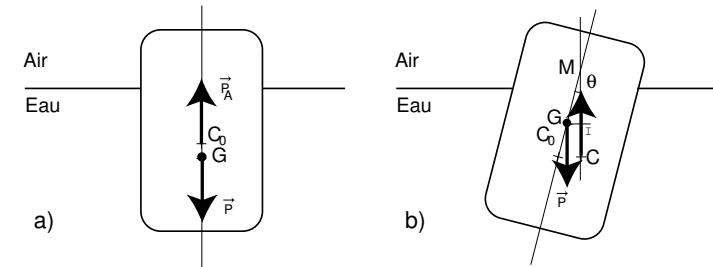
$$\vec{rot}(p \vec{OM}) = \vec{\nabla} p \wedge \vec{r} + p \vec{rot} \vec{r} = \rho \vec{g} \wedge \vec{r} + 0.$$

Donc finalement

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \iiint \rho g (y \vec{e}_x - x \vec{e}_y) d\tau.$$

$\vec{\mathcal{M}}_C = 0$ implique que $\int \rho g y d\tau = \int \rho g x d\tau = 0$. Ces conditions sont satisfaites si C est le barycentre de la masse de liquide déplacée (en effet on a alors $\int \rho g \vec{r} d\tau = \vec{0}$). Pour un liquide de masse volumique constante, C est aussi le centre du volume immergé. La connaissance de la position de ce centre de poussée est fondamentale pour la stabilité des navires. Toutefois, autant le centre de gravité d'un navire que nous noterons G a une position fixe tant que des masses ne se déplacent pas à l'intérieur du bateau, autant le centre de carène peut se déplacer car dès que le bateau va s'incliner ce n'est plus la même surface qui est mouillée et donc soumise à la pression de l'eau.

Une condition *suffisante* d'équilibre stable est que le centre de gravité soit au-dessus du centre de carène (figure 5.9a). Mais ce n'est pas une condition *nécessaire* et la plupart des navires, en particulier les paquebots ou les porte-conteneurs ont leur centre de gravité bien au-dessus du centre de carène ! Comment font-ils ?

FIGURE 5.9 – Equilibre d'un corps flottant. a) Centre de poussée C_0 au-dessus du centre de gravité G. b) Position du nouveau centre de poussée C et du métacentre M lors d'une inclinaison de θ .

5.4.2 Notion de métacentre

Un équilibre stable est par définition une état où un petit écart à la position de départ conduit à une force ou à un couple de rappel vers la position de départ. Considérons donc notre coque inclinée sur le côté d'un angle θ (figure 5.9b). Le navire étant incliné le volume immergé et donc le centre de carène sont déplacés dans le sens du mouvement, ici vers la droite (de C_0 en C). Le couple de redressement exercé par le poids appliqué en G et par la poussée d'Archimède appliquée en C est donc :

$$\vec{\mathcal{M}}(\theta) = \vec{P} \wedge \vec{IC} = mg GM \sin \theta$$

où M est à l'intersection de la verticale passant par C_0 lorsque $\theta = 0$ et de la verticale passant par C lorsque $\theta \neq 0$. Ce couple est stabilisant, même si G est au-dessus de C du moment qu'il reste à gauche de la verticale de C. Dans la limite où θ tend vers 0, M tend vers M_0 . Le point M_0 est appelé *métacentre* et il correspond au centre de courbure en C_0 de la courbe décrite par C lorsque θ varie. L'équilibre est stable si M_0 est situé au-dessus de G. Pour une discussion plus complète on peut lire la présentation très ludique de ce sujet pourtant assez technique dans l'article [25].

On voit donc qu'il existe deux façons de stabiliser un corps flottant, soit en descendant le centre de gravité en lestant le bateau, c'est ce qui est appelé la stabilité de poids, soit en montant le métacentre en élargissant la coque, ce qui est appelé la stabilité de forme. Les bateaux de la coupe de l'Amérique et les trimarans illustrent de façon extrême ces deux possibilités.

La connaissance du couple de redressement $\mathcal{M} = f(\theta)$ est très importante pour un architecte naval car cette courbe permet de déterminer le couple de rappel maximum, l'angle de stabilité maximum ainsi que l'angle de chavirage.

Exercice : Mettez un glaçon dans un verre d'eau. Il flotte. Pourquoi ? Le glaçon fondant plus vite dans sa partie immergée, expliquer ses mouvements successifs de bascule. A propos, pourquoi le niveau de l'eau reste inchangé lorsque le glaçon fond ? Pourtant on parle de montée des eaux lors des réchauffements climatiques. Comparer les différentes hypothèses suivantes : - dilatation de l'eau, - glaçon d'eau douce dans une mer salée, - glacier reposant sur les continents.

Chapitre 6

Fluides parfaits et équation d'Euler

Sommaire

6.1	Equation de Bernoulli	52
6.2	Généralisation de l'équation de Bernoulli	53
6.2.1	Cas d'un fluide barotrope	53
6.2.2	Cas d'un écoulement instationnaire mais irrotationnel	54
6.2.3	Effet Coanda	54
6.3	Quelques applications de l'équation de Bernoulli	55
6.3.1	Anémomètre à tube de Pitot	55
6.3.2	Effet Venturi et débitmètre de Venturi	56
6.3.3	Expérience de Torricelli	57
6.3.4	Effet Magnus	57
6.3.5	Portance d'une aile	58
6.3.6	Amplification des vagues par le vent	59
6.3.7	Jet incident sur une plaque	59
6.4	Paradoxe de d'Alembert	59

Si dans l'équation de Navier-Stokes démontrée au § 4.6 page 36,

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{g} + \vec{\text{div}}[\sigma'],$$

on néglige les contraintes de surface (autres que la pression) exercées sur le volume de contrôle, alors $\vec{\text{div}}[\sigma'] = \vec{0}$ et l'on obtient l'équation d'Euler, établie par Léonhard EULER en 1755 :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{g}. \quad (6.1)$$

Cette équation est valable pour les fluides dits « parfait », ceux pour lesquels on néglige les effets de la viscosité. Ceci est en général justifiable loin des parois et si le nombre de Reynolds (que nous définirons au § 8.1) de l'écoulement est élevé.

Le problème est bien posé si l'on connaît de plus les conditions aux limites sur $\vec{v}$ et sur p et si l'on écrit la conservation de la masse, $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{v}) = 0$.



FIGURE 6.1 – Portrait de Léonhard EULER (1707-1783)

6.1 Equation de Bernoulli

Un fluide parfait n'ayant par définition pas de viscosité, il ne peut pas dissiper d'énergie. On peut donc à partir de l'équation d'Euler trouver une équation de conservation de l'énergie, appelée équation de Bernoulli.

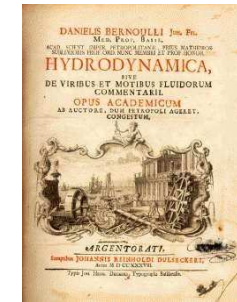


FIGURE 6.2 – Portrait de Daniel BERNOULLI (1700-1782) et première page de son traité « Hydrodynamica » publié en 1738. Bibliographie détaillée sur le site <http://www.bibmath.net/bios/index.php3>.

Démonstration : Voyons d'abord la démonstration classique de cette équation, nous verrons ensuite des généralisations possibles. On suppose donc :

1. un fluide de masse volumique constante ($\rho = Cste$)
2. un écoulement stationnaire ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$)
3. que les forces volumiques dérivent d'un potentiel : $\vec{g} = -\vec{\nabla}(\Phi)$. Dans le cas de la force de gravité $\Phi = gz$ avec l'axe z dirigé vers le haut.

Alors l'équation d'Euler (Eq. 6.1) peut s'écrire :

$$\rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla}(p + \rho gz)$$

Nous pouvons alors utiliser une relation du formulaire pour transformer partiellement le membre de gauche en un gradient. On a en effet l'identité :

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \wedge \vec{\text{rot}} \vec{B} + \vec{B} \wedge \vec{\text{rot}} \vec{A} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}$$

Si on l'écrit pour le vecteur $\vec{A} = \vec{B} = \vec{v}$ on obtient :

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}v^2\right) - \vec{v} \wedge \vec{\text{rot}} \vec{v}.$$

L'équation d'Euler s'écrit alors :

$$\boxed{\vec{\nabla}\left(\frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2}v^2\right) = \vec{v} \wedge \vec{\text{rot}} \vec{v}}. \quad (6.2)$$

Nous allons montrer que la quantité $C = \frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2}v^2$, appelé parfois la « charge », reste constante sur une ligne de courant.

Par définition du gradient nous avons :

$$dC = \vec{\nabla}(C) \cdot \vec{dl} = (\vec{v} \wedge \vec{\text{rot}} \vec{v}) \cdot \vec{dl}.$$

Donc si $\vec{dl}$ est colinéaire à $\vec{v}$, ce qui est le cas le long d'une ligne de courant, le terme de droite est nul et $dC = 0$. Ceci prouve bien que $C = C_{ste}$ sur une ligne de courant (il n'y a pas de « perte de charge »). Toutefois cette constante peut-être différente pour chaque ligne de courant.

Le même raisonnement permet de montrer que C est aussi une constante sur une ligne de vorticité (on appelle *vorticité* la quantité $\vec{\omega} = \vec{\text{rot}} \vec{v}$).

Si l'écoulement est irrotationnel (ou potentiel), c'est-à-dire si $\vec{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0}$ alors la constante C est la même sur toutes les lignes de courant.

- Le terme p est appelé *pression statique* (ou locale).
 - Le terme $\rho g h$ est appelé *pression hydrostatique*.
 - Le terme $\frac{1}{2}\rho v^2$ est appelé *pression dynamique*.
 - $p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho v^2$ est appelé *pression totale* ou pression de stagnation ou encore pression d'arrêt.
- En effet la charge étant constante sur une ligne de courant, cette pression totale est aussi la pression que l'on mesure en un point où la vitesse est nulle.

6.2 Généralisation de l'équation de Bernoulli

6.2.1 Cas d'un fluide barotrope

Si le fluide est compressible, mais que la masse volumique ρ en un point de l'écoulement ne dépend que de la pression p et pas de la température par exemple, on dit que le fluide est *barotrope* (cas d'une transformation isotherme ou adiabatique pour un gaz parfait par exemple). Dans ce cas on peut montrer que le terme $\frac{\vec{\nabla}(p)}{\rho}$ peut se mettre sous la forme d'un gradient :

$$\frac{\vec{\nabla}(p)}{\rho} = \vec{\nabla}\left(\int \frac{dp}{\rho(p)}\right).$$

En effet par définition du gradient on a : $\vec{\nabla}\left(\int \frac{dp}{\rho(p)}\right) \cdot \vec{dl} = d\left(\int \frac{dp}{\rho(p)}\right) = \frac{dp}{\rho(p)} = \frac{\vec{\nabla}p}{\rho(p)} \cdot \vec{dl}$. Et si l'écoulement est stationnaire et si les forces volumiques dérivent d'un potentiel, la charge peut se mettre sous la forme : $C = \int \frac{dp}{\rho(p)} + gz + \frac{1}{2}v^2$.

6.2.2 Cas d'un écoulement instationnaire mais irrotationnel

Si l'écoulement est instationnaire (mais incompressible et que les forces volumiques dérivent d'un potentiel), l'équation d'Euler peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2}v^2\right) = \vec{v} \wedge \vec{\text{rot}} \vec{v} = 0.$$

Si l'écoulement est *irrotationnel* ($\vec{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0}$), cela veut dire que $\vec{v}$ dérive d'un potentiel et l'on a $\vec{v} = \vec{\nabla}(\Phi)$ et donc $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{\nabla}\frac{\partial \Phi}{\partial t}$. On peut généraliser l'équation de Bernoulli à chaque instant par :

$$C(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2}v^2.$$

La charge $C(t)$ ne dépend pas de la position mais uniquement du temps. A chaque instant $C = C_{ste}$ dans toute la zone irrotationnelle. On peut d'ailleurs faire disparaître cette constante en redéfinissant le potentiel de vitesse comme $\Phi' = \Phi - \int_0^t C(t)dt$. Vérifiez-le.

6.2.3 Effet Coanda

Réécrivons l'équation d'Euler pour un écoulement stationnaire en négligeant les effets de gravité :

$$\rho\left(\frac{D\vec{v}}{Dt}\right) = \rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla}(p).$$

Si les lignes de courant sont courbées on peut utiliser le référentiel tangent et l'on note $\vec{n}$ le vecteur unitaire dirigé vers le centre de courbure de la trajectoire au point considéré et $\vec{t}$ le vecteur tangent. L'accélération s'écrit alors comme la somme d'une accélération tangente $\frac{dv}{dt}$ (dérivée du module de la vitesse) et d'une accélération centripète $\frac{v^2}{R}$ (R est le rayon de courbure local de la trajectoire) :

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{dv}{dt}\vec{t} + \frac{v^2}{R}\vec{n}.$$

L'équilibre de la composante radiale du gradient de pression et de la force centrifuge s'écrit donc :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{v^2}{R}.$$

C'est ce que l'on appelle l'effet « Coanda ». La pression augmente lorsque on s'éloigne du centre de courbure des lignes de courant. On peut utiliser cette relation pour expliquer la figure 6.3 où une balle est maintenue par une force dirigée vers le jet courbé. Cette force est aussi très nettement mesurable si l'on approche le dos d'une cuillère d'un filet d'eau sous un robinet. Cet effet Coanda n'est pas sans relation avec l'effet Magnus et l'effet de portance sur une aile décrits aux § 6.3.4 et 6.3.5.



FIGURE 6.3 – Effet Coanda

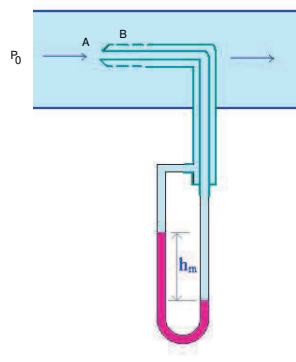


FIGURE 6.4 – Anémomètre à tube de Pitot

6.3 Quelques applications de l'équation de Bernoulli

6.3.1 Anémomètre à tube de Pitot

Cet appareil, inventé par Henri PITOT en 1732, permet à peu de frais de mesurer la vitesse moyenne d'un écoulement (figure 6.4).

Supposons un écoulement uniforme de vitesse U_∞ et à la pression P_∞ loin de l'obstacle. Le tube de Pitot étant profilé il perturbe peu l'écoulement. Une fois les niveaux des liquides équilibrés dans le manomètre il n'y a plus d'écoulement à l'intérieur du tube et les lois de l'hydrostatique s'appliquent $P_A - P_B = \rho_m g h_m$ où ρ_m est la masse volumique du liquide manométrique.

Sur la ligne de courant venant de l'infini et passant par le point de stagnation A on a $U_A = 0$ soit :

$$P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 = P_A$$

Cette même ligne de courant après A est défléchie le long du tube et passe au point B, donc on a aussi :

$$P_B + \frac{1}{2}\rho U_B^2 = P_A = P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2.$$

On supposera que la vitesse en B est déjà revenue à sa valeur à l'infini, $U_B = U_\infty$, alors cette équation nous montre que la pression en B est aussi égale à la pression P_∞ .

La différence entre la pression de stagnation mesurée en A et la pression à la paroi mesurée en B est donc proportionnelle au carré de la vitesse : $\Delta P = P_A - P_B = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2$, soit finalement :

$$U_\infty = \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\rho_m g h_m}{\rho}}.$$

Le tube de Pitot fonctionne également si le fluide n'est pas vraiment parfait à condition d'avoir un écoulement rapide (nombre de Reynolds élevé) pour que l'épaisseur des couches limites visqueuses soit faible. Nous verrons dans le chapitre 10 que dans ce cas le gradient de pression transverse à la couche limite est négligeable et que l'on peut bien confondre P_B et P_∞ .

6.3.2 Effet Venturi et débitmètre de Venturi

Considérons une conduite dont la section est localement et progressivement diminuée (figure 6.5). Une mesure de la chute de pression entre l'entrée du tube et l'endroit où la section est la plus faible va permettre, à condition de connaître les sections, de calculer le débit passant dans la conduite, et cela sans pièce mobile !

En régime stationnaire $p + \frac{1}{2}\rho U^2$ est constant sur les lignes de courant. Donc si on suppose de plus que la vitesse est uniforme dans toute section de la conduite (ce qui est réaliste pour un fluide parfait), on a si on appelle respectivement A, B et C, les trois points de mesure

$$P_A + \frac{1}{2}\rho U_A^2 = P_B + \frac{1}{2}\rho U_B^2 = P_C + \frac{1}{2}\rho U_C^2$$

Comme de plus on conserve le débit volumique $Q = Q_A = Q_B = Q_C$ soit $U_A S_A = U_B S_B = U_C S_C$, et donc on peut relier la différence de pression entre A et B à la vitesse et donc au débit Q :

$$P_A - P_B = \frac{1}{2}\rho(U_B^2 - U_A^2) = \frac{1}{2}\rho U_A^2 \left[\left(\frac{S_A}{S_B} \right)^2 - 1 \right]$$

soit

$$Q = S_A \sqrt{\frac{2(P_A - P_B)}{\rho} \left(\frac{S_B^2}{S_A^2 - S_B^2} \right)}.$$

La mesure de $P_A - P_B$ et la connaissance de S_A , S_B , et de la masse volumique ρ permettent de déterminer le débit.

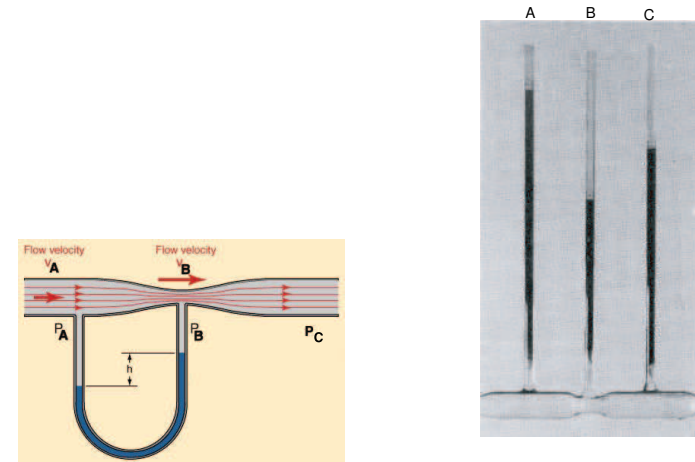


FIGURE 6.5 – Débitmètre de Venturi

FIGURE 6.6 – Démonstration de l'effet Venturi. D'après [28] p. 120. $P_A > P_C > P_B$.

Parfois la pression P_B est tellement faible au niveau de la contraction que l'on y observe des bulles de cavitation (dégagement de vapeur au sein du liquide si P_B devient inférieur à la pression de vapeur saturante du liquide).

Cet effet Venturi est utilisé dans les *trompes à eau* pour diminuer la pression de l'air dans une enceinte, ou pour projeter de la peinture avec un aérographe.

Exercice : refaire l'étude du débitmètre de Venturi pour un fluide compressible.

Notons que dans la figure 6.6, la pression en C est plus faible que la pression en A. Ceci est due aux pertes de charges dans le rétrécissement, pertes de charge qui n'existent que parce que le fluide n'est pas vraiment parfait et qu'il y a dissipation d'énergie. Une autre cause possible est que le rétrécissement est un peu trop brusque et qu'il se forme un jet en sortie (l'écoulement n'est alors plus homogène dans la section en C).

L'*artériosclérose* est une maladie où le diamètre des artères est localement diminué par des dépôts de graisse. L'effet Venturi explique en partie l'évolution grave de cette maladie.

6.3.3 Expérience de Torricelli

L'expérience de Torricelli consiste à vider un récipient par un petit trou situé à la profondeur h sous la surface du liquide (figure 6.7). Si le récipient est large on peut négliger le caractère instationnaire de l'écoulement (h diminue doucement) et sur une ligne de courant reliant un point de la surface à un point dans le trou on a : $P_{atm} + \rho gh + 0 = P_{atm} + 0 + \frac{1}{2}\rho U^2$ soit :

$$U = \sqrt{2gh}.$$

Une clepsydre (récipient rempli d'eau utilisé il y a bien longtemps pour mesurer les durées) étant basé sur ce principe, elle se vide de plus en plus lentement, contrairement à un sablier qui s'écoule lui à vitesse constante.

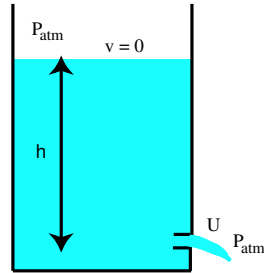


FIGURE 6.7 – Expérience de Torricelli

Exercice : En appliquant la conservation du débit, trouver l'équation régissant $h(t)$ pour un récipient cylindrique de section S et de section du trou s . Montrer en particulier que le temps de vidange vaut $\frac{S}{s} \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$, où h_0 est la hauteur initiale de remplissage au-dessus du trou. Quelle doit-être la forme du récipient $S(h)$ pour que l'écoulement se fasse à vitesse constante ?

6.3.4 Effet Magnus

Le nom d'effet Magnus vient du nom du physicien allemand Heinrich Gustav Magnus (1802-1870) qui a décrit ce phénomène en 1852. Dans de nombreux sports on « lifte » ou on « brosse » les

balles, c'est-à-dire qu'on leur donne une rotation sur elles-mêmes qui a pour effet de courber leur trajectoire. La encore cet effet peut-être décrits par le théorème de Bernoulli.

Prenons une balle tournant sur elle-même avec une vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ négative (figure 6.8). Dans le référentiel du centre de masse de cette balle il existe un écoulement d'air de gauche à droite d'intensité $\vec{U}$. A cause de l'existence de couches limites au voisinage de la balle (zones où la viscosité du fluide se fait sentir, voir § 10 page 97) et de la condition de non-glissement du fluide au voisinage de la surface de la balle (§ 8.2.1 page 76) le fluide va aller plus vite que $\vec{U}$ juste au-dessus de la balle (les vitesses s'ajoutent) et légèrement moins vite juste au-dessous (les vitesses se soustraient). La relation de Bernoulli nous dit alors que la pression va être un peu plus forte au-dessous qu'au-dessus de la balle avec pour conséquence une force dirigée ici de bas en haut (cas d'une balle brossée) appelée portance $\vec{F}_L$. Ici nous avons une portance positive qui fait monter la balle.

On peut montrer que $\vec{F}_L \propto \vec{U} \wedge \vec{\Omega}$. Une autre façon de décrire les choses est que, comme nous le verrons dans l'étude de la portance sur une aile d'avion, il existe une portance parce qu'apparaît une circulation du vecteur vitesse $\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{l}$ autour de l'objet.

Une autre application classique de l'effet Magnus est la propulsion par cylindres tournants imaginée par Anton FLETTNER et pour la première fois utilisée sur le Baden Baden en 1926. L'idée a ensuite été perfectionnée pour l'Alcyon, bateau de J.-Y. COUSTEAU. Dans ce cas la dissymétrie entre les couches limites est contrôlée par aspiration asymétrique des couches limites plutôt que par la rotation du cylindre.

6.3.5 Portance d'une aile

Les deux figures suivantes représentent respectivement l'écoulement et les forces locales agissant sur une aile portante sous faible incidence. L'équation de Bernoulli permet d'évaluer assez simplement la portance sur une telle aile (pour plus de détail, voir le chapitre 12).

Si on compare deux lignes de courant passant respectivement juste au-dessous (zone 1) et juste au-dessus (zone 2) d'une aile de longueur L et d'envergure a , on peut écrire :

$$P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho U_1^2$$

et

$$P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho U_2^2$$

soit :

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(U_2^2 - U_1^2) = \frac{1}{2}\rho(U_2 - U_1)(U_2 + U_1).$$

Au premier ordre on peut écrire $U_2 + U_1 \approx 2U_\infty$ et la portance peut s'écrire :

$$Portance \approx \int_0^L a (P_1 - P_2) dl \approx a\rho U_\infty \left[\int_0^L (U_2 - U_1) dl \right] = -a\rho U_\infty \Gamma$$

où Γ est la circulation autour de l'aile calculée dans le sens trigonométrique. Ce calcul est très approximatif mais le résultat est exact comme nous le verrons au chapitre 12 page 117 !

Notons que dans ce type d'approche, basée sur l'équation d'Euler et la conservation de l'énergie, il n'existe pas de force de traînée puisqu'il n'y a pas de viscosité (voir § 6.4 page suivante). En effet sans viscosité il n'existe pas de vorticité, ni de couche limite, ni de décollement de couche limite, un phénomène pourtant capital pour expliquer le décrochage d'une aile.

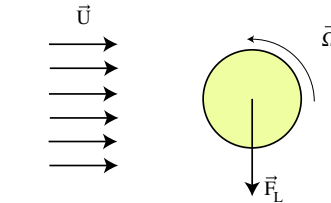


FIGURE 6.8 – Exemple de portance acquise par effet Magnus d'une balle tournant sur elle-même.

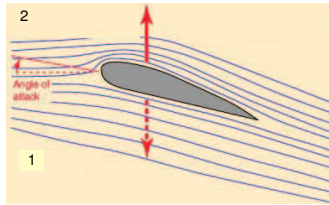


FIGURE 6.9 – Portance sur une aile en incidence. La portance exercée par l'air sur l'aile est égale et opposée à l'action de l'aile déviant l'air vers le bas.

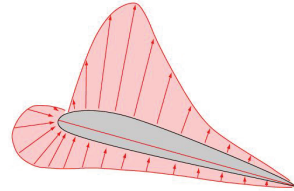


FIGURE 6.10 – Répartition réelle de pression autour d'une aile.

6.3.6 Amplification des vagues par le vent

L'apparition des vagues sous l'action du vent peut se comprendre comme une instabilité (l'instabilité de Kelvin-Helmholtz, voir ?? page ??) dont l'effet déstabilisant s'explique par l'équation de Bernoulli. En effet si on considère une interface air-eau légèrement déformée et que l'on décrit les lignes de courant dans le référentiel qui se déplace avec les vagues (afin de pouvoir appliquer l'équation de Bernoulli stationnaire), le vent est accéléré au-dessus des crêtes, la pression y est donc plus faible. De même la vitesse du vent décroît au niveau des creux, la pression y est plus forte. Le même raisonnement peut être fait dans l'eau. En conséquence l'amplitude de la déformation initiale de l'interface croît. Ce sont les forces de gravité et de tension de surface qui vont limiter l'amplitude des vagues.

6.3.7 Jet incident sur une plaque

Exercice : Calculer la force appliquée par un jet d'eau (bidimensionnel et horizontal), d'épaisseur h rencontrant une plaque plane inclinée d'un angle α vis-à-vis de la verticale. Montrer que la force par unité de largeur perpendiculaire à la plaque $F_{\perp}$ vaut :

$$F_{\perp} = \rho U^2 h \cos \alpha.$$

6.4 Paradoxe de d'Alembert

On nomme paradoxe de d'Alembert le fait que dans le cadre de l'équation d'Euler il n'existe pas de force de traînée sur un obstacle (force dans le sens de l'écoulement appliqué par le fluide sur l'obstacle) bien qu'on puisse calculer une portance. Les forces de traînée existent pourtant bien dans la réalité, mais elles sont dues en grandes parties à l'existence de couches limites (éventuellement décollées) qui changent la distribution de pression autour de l'obstacle par rapport au cas du fluide parfait.

Dans le cas d'une aile, le flux de quantité de mouvement est défléchi ce qui donne une portance, par contre il n'y a pas de perte de quantité de mouvement ce qui correspondrait à une force de traînée et à une dissipation d'énergie.

Chapitre 7

La viscosité des fluides

Sommaire

7.1	Tenseur des déformations $[\epsilon]$ (<i>strain tensor</i>)	61
7.2	Tenseur des taux de déformation (rate of strain tensor) ou tenseur des gradients de vitesse $[G]$	62
7.2.1	Décomposition d'un tenseur	62
7.2.2	Partie symétrique de $[G]$ ou tenseur $[e]$ des déformations pures	63
7.2.3	Partie antisymétrique de $[G]$ ou tenseur $[\omega]$ des rotations pures	64
7.3	Equation constitutive des fluides newtoniens	65
7.4	Divergence du tenseur des contraintes visqueuses	66
7.5	Equation de Navier-Stokes pour un fluide newtonien	66
7.6	Signification physique de la viscosité	67
7.7	Mesure de la viscosité	68
7.7.1	Quelques viscosimètres simples	68
7.7.2	Quelques exemples de rhéomètre	69
7.8	Quelques exemples de fluides non-newtoniens	70

Un fluide parfait n'a pas de viscosité, c'est-à-dire que deux veines de fluides vont pouvoir s'écouler côte à côte à des vitesses différentes sans interagir. Pour un fluide réel, à cause de l'agitation moléculaire d'origine thermique, il y a des collisions entre molécules des deux veines et donc échange progressif de quantité de mouvement. La viscosité est le coefficient qui mesure cette diffusion de la quantité de mouvement.

7.1 Tenseur des déformations $[\epsilon]$ (*strain tensor*)

Lorsqu'on tire avec une force constante sur une barre de métal, elle commence par s'allonger. Ensuite la longueur de la barre reste constante (sauf en cas de fluage) et l'on peut alors définir l'allongement relatif d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ aligné avec l'axe de traction par la quantité :

$$\bar{\epsilon}(\overrightarrow{AB}) = \frac{\overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}.$$

A cette déformation longitudinale s'ajoutent des déformations transverses de compression. Si maintenant la contrainte à lieu dans une direction quelconque, on peut connaître la déformation d'un volume élémentaire si on connaît les 9 coefficients ϵ_{ij} et donc le *tenseur des déformations* $[\epsilon]$ (appelé *strain tensor* en anglais). Le tenseur des déformations est la réponse du solide à une contrainte appliquée. Dans le cadre de la théorie de l'élasticité linéaire [13] il y a proportionnalité entre le tenseur des déformations $[\epsilon]$ et le tenseur des contraintes $[\sigma]$, c'est-à-dire qu'il existe un tenseur de rang 4 tel que :

$$\epsilon_{ij} = A_{ijkl} \sigma_{kl}.$$

Heureusement les propriétés d'isotropie du matériau permettent de ramener les $9 \times 9 = 81$ coefficients du tenseur $[A]$ à seulement deux coefficients : le module d'Young, E , (s'exprime en GPa par exemple) qui caractérise la raideur du matériau et le coefficient de Poisson, μ , (sans dimension $0 < \mu < \frac{1}{2}$) qui caractérise sa diminution de volume sous compression.

7.2 Tenseur des taux de déformation (rate of strain tensor) ou tenseur des gradients de vitesse $[G]$

Pour un fluide soumis à une contrainte constante, la déformation se poursuit indéfiniment, contrairement au cas du solide où elle s'arrête au bout d'un temps fini. Par contre, la « vitesse de déformation » va être fonction de l'intensité de la contrainte. On nomme cette vitesse de déformation, *taux de déformation*. On peut donc définir un tenseur des taux de déformation $[\dot{\epsilon}]$, dérivée par rapport au temps du tenseur des déformations, qui n'est rien d'autre qu'un tenseur que nous avons déjà rencontré au chapitre 4, le *tenseur des gradients de vitesse* : $[\dot{\epsilon}] = [G] = \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right]$.

$$[\dot{\epsilon}] = \frac{\partial}{\partial t} [\epsilon] = [G].$$

Le tenseur $[G]$ décrit la variation spatiale du vecteur vitesse au voisinage d'un point. En effet la différence de vitesse entre un point $\vec{r}$ et un point $\vec{r} + \vec{dr}$ s'écrit :

$$\vec{v}(\vec{r} + \vec{dr}) - \vec{v}(\vec{r}) = \vec{dv} = [G] \cdot \vec{dr},$$

car

$$dv_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j = \vec{\nabla} (v_i) \cdot \vec{dr}. \quad (7.1)$$

La dimension des coefficients $G_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ est l'inverse d'un temps (par exemple des s^{-1}).

7.2.1 Décomposition d'un tenseur

Tout tenseur peut être décomposé en la somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique. Pour le tenseur des gradients de vitesse, il suffit d'écrire :

$$[G] = [e] + [w] \quad (7.2)$$

avec

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (7.3)$$

et

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (7.4)$$

Par construction le tenseur $[e]$ est un tenseur symétrique ($e_{ij} = e_{ji}$) et $[\omega]$ un tenseur antisymétrique ($\omega_{ij} = -\omega_{ji}$).

7.2.2 Partie symétrique de $[G]$ ou tenseur $[e]$ des déformations pures

Le tenseur $[e]$ (Equ. 7.3) étant symétrique est caractérisé par 6 coefficients indépendants.

Notons déjà que $\text{trace}[e] = \text{trace}[G] = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \text{div}(\vec{v})$. Pour un fluide incompressible on a donc, $\text{trace}[e] = 0$.

Le tenseur $[e]$ étant symétrique dans une base orthonormée il est en chaque point diagonalisable. Dans la base orthonormée construite localement sur ses vecteurs propres il s'écrit donc :

$$[e] = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

Il n'y a maintenant plus que trois coefficients (les valeurs propres) mais cette base locale est définie par trois autres coefficients (par exemple les trois angles d'Euler), ce qui redonne bien les 6 coefficients de départ. Si l'écoulement est incompressible, $a + b + c = 0$. Il y a donc de façon générique soit une direction contractante ($a < 0$) et 2 directions dilatantes (b et $c > 0$), soit l'inverse (figure 7.1).

Un tel écoulement qui n'induit pas de rotation de la particule fluide, est dit de *déformation pure*.

En conclusion, les termes symétriques du tenseur des gradients de vitesse $[G]$ correspondent à des déformations pures.

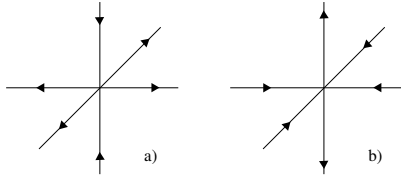


FIGURE 7.1 – Les deux cas génériques d'une déformation pure d'un écoulement incompressible 3D dans sa base orthonormée locale des vecteurs propres. a) une direction contractante, b) une direction dilatante.

• Exercices à deux dimensions :

- Etudier les déformations d'un carré pendant dt (figure 7.2a) si $[G] = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$.
- De même étudier les déformations d'un carré pendant dt si $[G] = \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix}$.

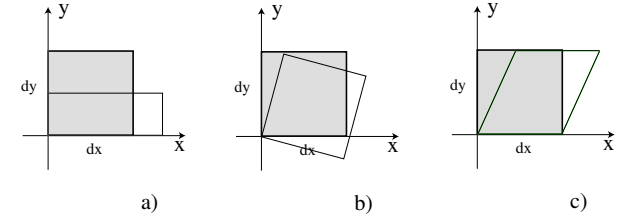


FIGURE 7.2 – Trois cas de transformation d'une particule fluide dans un écoulement bidimensionnel.

7.2.3 Partie antisymétrique de $[G]$ ou tenseur $[\omega]$ des rotations pures

La partie antisymétrique de $[G]$ s'écrit : $\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right)$. Il est caractérisé par trois coefficients,

$$[\omega] = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.5)$$

Construisons le **vecteur** $\vec{\omega} = \{w_k\}$ ayant pour composantes $w_k = -\epsilon_{ijk} \omega_{ij}$ où ϵ_{ijk} vaut 0, -1 ou +1 selon que deux des indices sont égaux, qu'ils sont dans le sens indirect ou qu'ils sont dans le sens direct. Donc

$$\begin{cases} \omega_1 = -\omega_{23} + \omega_{32} = \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \omega_2 = \omega_{13} - \omega_{31} = \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \omega_3 = \omega_{21} - \omega_{12} = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{cases}.$$

On constate donc que $\vec{\omega} = \vec{\text{rot}}(\vec{v})$. Le vecteur $\vec{\omega}$ s'appelle le vecteur **vorticité** de l'écoulement, il caractérise la rotation locale des particules fluides. C'est un vecteur très important pour l'étude de la dynamique des tourbillons (voir chapitre 12).

On a donc $d\vec{v} = [G] \cdot d\vec{l} + [\omega] \cdot d\vec{l}$. En utilisant l'équation 7.5, on a :

$$[\omega] \cdot d\vec{l} = \frac{1}{2} (\vec{\omega} \wedge d\vec{l}).$$

Donc si $[e] = 0$, on a $d\vec{v} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \wedge d\vec{l}$, ce qui correspond à une *rotation locale pure* de vecteur rotation instantanée $\frac{1}{2} \vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\text{rot}} \vec{v}$.

Il est important de noter qu'une rotation pure ne déforme pas la particule fluide et il n'y a pas de mouvements relatifs des particules à l'intérieur. Elle ne dissipe donc pas d'énergie.

Rappelons qu'un mouvement quelconque d'une particule fluide est la somme d'une translation pure ($d\vec{v} = \vec{0}$), d'une rotation pure ($d\vec{v} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \wedge d\vec{l}$) et d'une déformation pure ($d\vec{v} = [e] \cdot d\vec{l}$). Seule la déformation pure dissipe de l'énergie. On peut facilement l'illustrer en faisant tourner côte à côte un

œuf dur et un œuf cru. Le second est beaucoup plus difficile à mettre en rotation. Pourquoi ?

• **Exercices à deux dimensions :**

- Etudier les déformations d'un carré pendant dt (figure 7.2b) si $[G] = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$.
- Etude d'un cisaillement simple (qui n'est pas une déformation pure), l'écoulement de Couette plan : $[G] = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Tracer le profil de vitesse de cet écoulement, calculer sa vorticité et son taux de déformation. Application à la déformation d'un carré pendant dt (figure 7.2c).

7.3 Equation constitutive des fluides newtoniens

Nous avons vu au chapitre 6 que le seul terme qui va dissiper de l'énergie dans l'écriture du principe fondamental de la dynamique (équation 4.3 page 37) est le terme qui fait intervenir le tenseur des contraintes visqueuses $\overrightarrow{\text{div}}[\sigma']$. Or ni la translation globale de la particule fluide, ni sa rotation en bloc ne déforme la particule fluide (pas de mouvement relatif à l'intérieur). Seules les déformations pures dissipent de l'énergie, et donc le tenseur des contraintes visqueuses ne peut dépendre que de la partie symétrique du tenseur des déformations. Ce que l'on écrit :

$$[\sigma'] = f([e]).$$

On appelle **fluides newtoniens** les fluides pour lesquels le tenseur des contraintes visqueuses dépend **uniquement** et **linéairement** des valeurs **instantanées** des déformations. Soit :

$$\sigma'_{ij} = A_{ijkl} e_{kl},$$

où nous utilisons la convention d'Einstein (sommation implicite de tous les indices redoublés). $[A]$ est alors un tenseur de rang 4. Si le milieu est isotrope (invariant dans les directions 1, 2 et 3), on peut montrer de façon générale [13] qu'un tel tenseur, au lieu d'avoir 81 coefficients indépendants, n'en a que trois, A , A' et B et s'écrit :

$$A_{ijkl} = A \delta_{ik} \delta_{jl} + A' \delta_{il} \delta_{jk} + B \delta_{ij} \delta_{kl}.$$

δ_{ij} est l'indice de Kroneker (il vaut zéro si $i \neq j$ et 1 si $i = j$). Comme le tenseur des contraintes visqueuses est symétrique, ($\sigma'_{ij} = \sigma'_{ji}$) on en déduit $A = A'$.

$$\sigma'_{ij} = A(\delta_{ik} \delta_{jl} e_{kl} + \delta_{il} \delta_{jk} e_{kl}) + B \delta_{ij} \delta_{kl} e_{kl} = A(e_{ij} + e_{ji}) + B \delta_{ij} e_{ll} = 2A e_{ij} + B \delta_{ij} e_{ll},$$

en effet le tenseur $[e]$ est symétrique. On pose en général $A = \eta$ et $B = \zeta - \frac{2}{3}\eta$. La constante η est appelée la viscosité de cisaillement et ζ (zéta) la viscosité de volume. Alors :

$$\sigma'_{ij} = 2\eta(e_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}e_{ll}) + \zeta\delta_{ij}e_{ll}. \quad (7.6)$$

Le premier terme est de trace nulle (en effet $\delta_{ll} = 3$), le deuxième terme fait apparaître la trace du tenseur $[e]$ ($\text{trace}[e] = e_{ll}$) qui caractérise la compressibilité de l'écoulement. Or $\text{trace}[e] = \text{trace}[G] = \text{div}(\vec{v})$. Donc **pour un fluide incompressible**, $\text{div}(\vec{v}) = e_{ll} = 0$, et donc $[\sigma'] = 2\eta[e]$, soit :

$$\sigma'_{ij} = 2\eta e_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (7.7)$$

7.4 Divergence du tenseur des contraintes visqueuses

Partons de la relation 7.6. La composante i du vecteur divergence du tenseur des contraintes visqueuses s'écrit (voir § 4.6) :

$$\left\{ \overrightarrow{\text{div}}[\sigma'_{ij}] \right\}_i = \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} = 2\eta \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_j} + \left(\zeta - \frac{2}{3}\eta \right) \delta_{ij} \frac{\partial e_{ll}}{\partial x_j}.$$

Or $e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$, donc :

$$\left\{ \overrightarrow{\text{div}}[\sigma'_{ij}] \right\}_i = \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \eta \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j \partial x_i} + \left(\zeta - \frac{2}{3}\eta \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right).$$

$$\left\{ \overrightarrow{\text{div}}[\sigma'_{ij}] \right\}_i = \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \left(\zeta + \frac{1}{3}\eta \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right).$$

$$\left\{ \overrightarrow{\text{div}}[\sigma'_{ij}] \right\}_i = \eta \nabla^2 v_i + \left(\zeta + \frac{1}{3}\eta \right) \frac{\partial}{\partial x_i} [\text{div}(\vec{v})].$$

Soit vectoriellement :

$$\overrightarrow{\text{div}}[\sigma'] = \eta \vec{\nabla}^2(\vec{v}) + \left(\zeta + \frac{1}{3}\eta \right) \vec{\nabla}[\text{div}(\vec{v})]. \quad (7.8)$$

7.5 Equation de Navier-Stokes pour un fluide newtonien

A partir du Principe Fondamental de la Dynamique nous avons trouvé (Eq. 4.3) :

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla}(p) + \rho \vec{g} + \overrightarrow{\text{div}}[\sigma']$$

De l'équation 7.8 on déduit directement l'équation de Navier-Stokes pour un fluide newtonien éventuellement compressible :

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla}(p) + \rho \vec{g} + \eta \vec{\nabla}^2 \vec{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3}\eta \right) \vec{\nabla}[\text{div}(\vec{v})]. \quad (7.9)$$

La viscosité η est appelé la viscosité de cisaillement ou aussi la viscosité dynamique (elle est parfois notée μ et s'exprime en Pa.s). La viscosité de volume ζ est en général faible, elle intervient par exemple dans l'atténuation du son dans un fluide. Dans le cas où le fluide est incompressible ($\text{div}(\vec{v}) = 0$) on obtient l'**équation de Navier-Stokes** d'un fluide newtonien **incompressible** :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla}(p) + \vec{g} + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{v}. \quad (7.10)$$

Où $\left[\nu = \frac{\eta}{\rho} \right]$ est appelé la viscosité cinématique (unité classique, le $m^2 s^{-1}$). Comme la viscosité dynamique, ν est une propriété du fluide et pas de l'écoulement. La viscosité dynamique caractérise la viscosité de cisaillement par unité de masse contrairement à η qui est la viscosité de cisaillement par unité de volume.

7.6 Signification physique de la viscosité

Le coefficient de viscosité correspond au coefficient de diffusion de la quantité de mouvement. C'est grâce à la viscosité que le mouvement d'une couche de fluide peut induire des mouvements dans les couches voisines (voir films du DVD [17]) et les exemples du § 9.1.6.

Le coefficient de viscosité caractérise la dissipation d'énergie. Montrons que la puissance dissipée par frottement interne n'existe que si la particule fluide est déformée et que la puissance dissipée par unité de volume s'écrit :

$$\epsilon = -2\eta e_{ij}e_{ij} = -\frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right),$$

avec une sommation implicite sur tous les indices redoublés (notations tensorielles) :

$$e_{ij}e_{ij} = e_{11}^2 + e_{12}^2 + e_{13}^2 + e_{21}^2 + e_{22}^2 + e_{23}^2 + e_{31}^2 + e_{32}^2 + e_{33}^2,$$

où plusieurs de ces termes sont égaux car le tenseur des déformations est un tenseur symétrique. Cette puissance est dissipée en chaleur dans le fluide, d'où le signe moins.

Démonstration : Voici une démonstration inspirée de la référence [1] p. 216.

L'énergie cinétique E_c contenue dans un volume de contrôle matériel s'écrit :

$$E_c = \iiint_{VC_m} \frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 d\tau.$$

Calculons la dérivée temporelle de cette énergie cinétique. En appliquant le théorème du transport pour une quantité scalaire (Equ. 3.2 page 26) et la conservation de la masse, $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$ (Equ. 3.3 page 27) :

$$\begin{aligned} \frac{dE_c}{dt} &= \iiint_{VC_m} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial(\rho \vec{v}^2)}{\partial t} + \text{div} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \vec{v} \right) \right] d\tau \\ &= \iiint_{VC_m} \left[\frac{1}{2} \rho \frac{\partial \vec{v}^2}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) \right] + \rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) \right] d\tau \\ &= \iiint_{VC_m} \frac{1}{2} \rho \frac{D\vec{v}^2}{Dt} d\tau. \end{aligned}$$

En introduisant la convention d'Einstein sur les indices redoublés, la dérivée de l'énergie cinétique s'écrit donc :

$$\frac{dE_c}{dt} = \iiint_{VC_m} \rho v_i \frac{Dv_i}{Dt} d\tau.$$

En introduisant le tenseur des contraintes σ_{ij} pour les forces de surface, le principe fondamental de la dynamique peut s'écrire : $\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \rho g_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$ (voir § 4.6 page 36), donc :

$$\frac{dE_c}{dt} = \iiint_{VC_m} \left[\rho v_i g_i + v_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right] d\tau.$$

Le terme qui contient le tenseur des contraintes peut s'écrire : $v_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i \sigma_{ij}) - \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ et on a donc :

$$\frac{dE_c}{dt} = \iiint_{VC_m} \rho v_i g_i d\tau + \iiint_{VC_m} \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i \sigma_{ij}) d\tau - \iiint_{VC_m} \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\tau. \quad (7.11)$$

– Le premier terme du membre de droite de l'expression précédente,

$$\iiint_{VC_m} \rho \vec{v} \cdot \vec{g} d\tau$$

représente la variation d'énergie potentielle (la puissance) due à la force de gravité, ou plus généralement à toutes les forces volumiques.

– Le deuxième terme peut écrire :

$$\iiint_{VC_m} \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i \sigma_{ij}) d\tau = \iiint_{VC_m} \text{div}([\sigma] \cdot \vec{v}) d\tau = \iint_{SC_m} ([\sigma] \cdot \vec{v}) \cdot \vec{n} dS = \iint_{SC_m} \vec{v} \cdot \vec{\sigma}(\vec{n}) dS.$$

Il représente donc la variation d'énergie due aux forces de surface $\vec{\sigma}(\vec{n})dS$ qui s'exercent sur chaque élément de la surface du volume de contrôle.

– Enfin le troisième terme peut se transformer encore. En effet

$$\sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \sigma_{ji} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

puisque on peut permuter les indices muets i et j et que $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ car le tenseur des contraintes est symétrique.

De plus $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ (Equ. 7.7 page 65), donc

$$\sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = 2\eta e_{ij}e_{ij}$$

car $\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \text{div} \vec{v} = 0$. Donc le troisième terme s'écrit finalement :

$$- \iiint_{VC_m} \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\tau = -2\eta \iiint_{VC_m} e_{ij}e_{ij} d\tau.$$

Ce dernier terme, toujours négatif, représente donc la dissipation d'énergie. Elle est proportionnelle au coefficient de viscosité dynamique η , et toujours présente si le tenseur des déformations est non nul. Seule la déformation des particules fluides dissipe de l'énergie, pas leur translation ni leur rotation.

7.7 Mesure de la viscosité

Il existe de nombreux appareils pour mesurer la viscosité. On distingue les *viscosimètres* utilisés pour les fluides newtoniens, qui font une mesure comparative et doivent donc être étalonnés, des *rhéomètres* qui mesurent directement les contraintes et les taux de déformation. On réalise en général des écoulements rhéologiques, c'est-à-dire des écoulements où un seul terme du tenseur des gradients de vitesse est non nul et il faut de plus qu'il soit constant en temps et homogène en espace. On appelle taux de cisaillement, traditionnellement noté $\dot{\gamma}$, ce coefficient. Par exemple $\dot{\gamma} = \partial v_x / \partial y$.

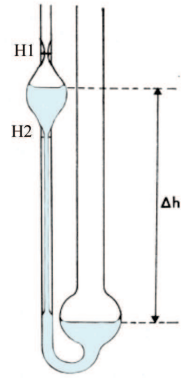


FIGURE 7.3 – Viscosimètre à tube capillaire.



FIGURE 7.4 – Viscosimètre à chute de bille.

7.7.1 Quelques viscosimètres simples

Avec un viscosimètre à tube capillaire on mesure le temps d'écoulement d'un liquide visqueux à travers un tube mince (figure 7.3). Ce temps est proportionnel à la viscosité. On fait de même dans un viscosimètre à chute de bille, où cette fois l'on mesure le temps de chute d'une bille à travers un tube préalablement rempli du liquide à tester (figure 7.4). Dans la méthode de la *louche percée* utilisée dans l'industrie de la peinture, on mesure le temps de vidange d'une louche percée d'un trou calibré.

7.7.2 Quelques exemples de rhéomètre

Dans un rhéomètre on cherche à réaliser des écoulements particuliers, où les déformations sont homogènes en espace et constantes en temps. Pour mesurer la viscosité de cisaillement on utilise des écoulements où il n'existe qu'une seule composante du tenseur des gradients de vitesse : par exemple la géométrie de Couette cylindrique (§ 9.1.2) ou la géométrie du cône/plan (figure 7.5).

La figure 7.6 montre que la viscosité est une propriété des fluides qui dépend fortement de la température, mais différemment pour un gaz ou un liquide ! Dans un liquide les viscosités dynamique et cinématique diminuent avec la température (loi de Andrade, $\log(\eta) \approx A + \frac{B}{T}$). Pour un gaz au contraire elles augmentent avec la température (l'agitation moléculaire augmentant, la diffusion de la quantité de mouvement augmente aussi).

7.8 Quelques exemples de fluides non-newtoniens

Pour certains fluides, $[\sigma'] \neq 2\eta[e]$ et il faut alors modéliser le comportement réel par d'autres équations dites *équations constitutives*. Parmi ces fluides on peut citer les peintures, les shampoings, l'aligot (mélange purée/tomme de l'Aubrac), les gels coiffants, la silliputy ... Avec un rhéomètre on doit alors étudier la variation de la viscosité apparente avec l'intensité du taux de cisaillement $\eta = f(\dot{\gamma})$. Pour un fluide rhéofluidifiant (le plus couramment rencontré) la viscosité est une fonction

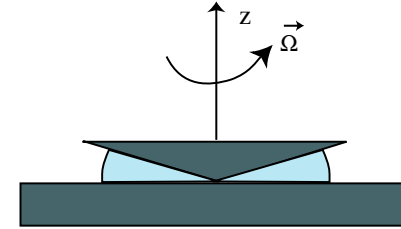


FIGURE 7.5 – Principe du rhéomètre cône/plan. Il peut fonctionner soit à contrainte imposée (couple imposé) soit à cisaillement imposé ($\dot{\Omega} = Cste$) et il permet de plus de mesurer les contraintes normales σ_{zz} , ce qui est utile pour un fluide élastique.

	Viscosité dynamique η (Pa.s)	Viscosité cinématique $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ (m ² /s)
Eau (20°C)	10^{-3}	$1,006 \cdot 10^{-6}$
Air (20°C)	$18,2 \cdot 10^{-6}$	$15,1 \cdot 10^{-6}$
Glycérine (20°C)	1,49	$1180 \cdot 10^{-6}$
Mercure (20°C)	$1,55 \cdot 10^{-3}$	$0,116 \cdot 10^{-6}$
CO ₂ (20°C, 1 atm.)	$14,7 \cdot 10^{-6}$	$8,03 \cdot 10^{-6}$
H ₂ (20°C, 1 atm.)	$8,83 \cdot 10^{-6}$	$105 \cdot 10^{-6}$

TABLE 7.1 – Tableau donnant les viscosités de quelques fluides à 20°C.

décroissante de la contrainte (figure 7.7). Pour d'autres fluides, notamment les solutions de polymères à chaînes flexibles, de l'énergie peut être stockée sous forme élastique, donnant lieu à des comportements visco-élastiques inattendus tel que le gonflement (figure 7.8) ou l'effet Weissenberg (figure 7.9).

La plupart des fluides sont rhéo-fluidifiants (leur viscosité décroît sous cisaillement) mais certaines suspensions de particules sont rhéo-épaississantes (la viscosité croît avec la contrainte). C'est le cas d'un mélange eau-Maïzena, comme le montre la très belle vidéo suivante : <http://chezmatthieu.blogspot.com/2006/11/pool-filled-with-non-newtonian-fluid.html> !

Pour en savoir plus : *Comment s'écoulent les fluides complexes*, Daniel Boon, séminaire disponible en vidéo téléchargeable sur <http://www.diffusion.ens.fr/index.php?res=conf&idconf=664>.

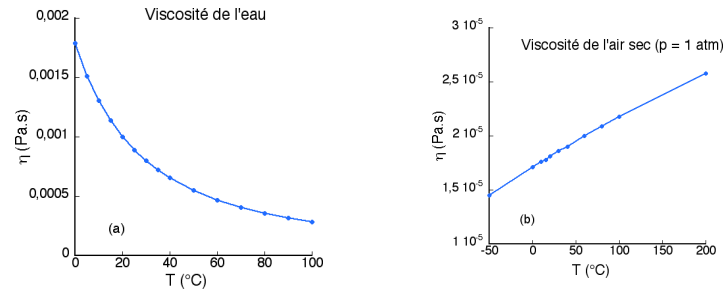


FIGURE 7.6 – Courbes montrant l'évolution de la viscosité dynamique η de l'eau (a) et de l'air sec (b) en fonction de la température, à une pression de 1 atm. (D'après [3] p. 594-597).

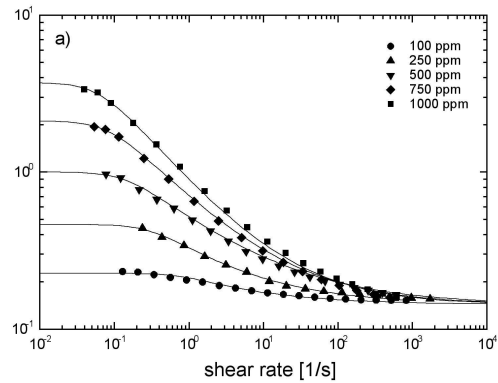


FIGURE 7.7 – Rhéogramme montrant pour différentes concentrations en polymère la diminution de la viscosité dynamique apparente η avec le taux de cisaillement $\dot{\gamma} = \partial v_x / \partial y$.



FIGURE 7.8 – Ecoulement d'un fluide visco-élastique montrant le gonflement progressif d'un jet à la sortie d'un tube lorsque le taux de cisaillement augmente ($\dot{\gamma} = 24$ puis 60 puis 240 s^{-1}), ce qui démontre l'existence de contraintes normales dans ce fluide. (Photos L. Pauchard, FAST Orsay.)

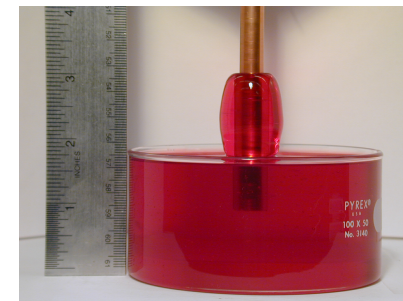


FIGURE 7.9 – Illustration de « l'effet Weissenberg » lorsqu'un fluide élastique monte le long d'un cylindre en rotation (<http://web.mit.edu/nmf/>).

Chapitre 8

L'équation de Navier-Stokes

Sommaire

8.1 Adimensionnement de l'équation de Navier-Stokes pour un fluide newtonien incompressible	73
8.1.1 Quelques valeurs de nombres de Reynolds	74
8.1.2 Quelques autres nombres sans dimension	75
8.2 Les conditions aux limites cinématiques et dynamiques	76
8.2.1 Les conditions cinématiques	76
8.2.2 Les conditions dynamiques	78
8.2.3 Tableau récapitulatif des conditions aux limites	80

8.1 Adimensionnement de l'équation de Navier-Stokes pour un fluide newtonien incompressible

Dans le chapitre précédent, nous avons montré (équation 7.10) que l'équation de Navier-Stokes pour un fluide newtonien incompressible s'écrit :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla}(p) + \vec{g} + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{v}. \quad (8.1)$$

Le premier terme s'appelle le terme instationnaire, le second le terme inertiel. A droite on a successivement les forces de pression, les forces de volume et les forces visqueuses. Cette équation, écrite par unité de masse, est dimensionnée mais on peut chercher à l'adimensionner.

On adimensionne les variables par :

$$t = \hat{t} T, \quad x_i = \hat{x}_i L, \quad v = \hat{v} V_0, \quad p = \hat{p} P_0, \quad \vec{g} = \vec{\hat{g}} G,$$

où les termes en majuscule sont des constantes dimensionnées et les termes avec un chapeau les variables sans dimension. On peut remplacer dans l'équation de Navier-Stokes et l'on obtient :

$$\frac{V_0}{T} \frac{\partial \vec{\hat{v}}}{\partial \hat{t}} + \frac{V_0^2}{L} (\vec{\hat{v}} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\hat{v}} = -\frac{P_0}{\rho L} \vec{\nabla}(\hat{p}) + G \vec{\hat{g}} + \frac{\nu V_0}{L^2} \vec{\nabla}^2 (\vec{\hat{v}}).$$

Soit si on fait apparaître un coefficient unité devant le terme inertiel :

$$\frac{L}{V_0 T} \frac{\partial \vec{\hat{v}}}{\partial \hat{t}} + (\vec{\hat{v}} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\hat{v}} = -\frac{P_0}{\rho V_0^2} \vec{\nabla}(\hat{p}) + \frac{L G}{V_0^2} \vec{\hat{g}} + \frac{\nu}{V_0 L} \vec{\nabla}^2 (\vec{\hat{v}}).$$

Considérons d'abord le cas particulier d'une sphère de rayon L se déplaçant à une vitesse constante V_0 dans un fluide au repos. L et V_0 sont les seules échelles du problème et il n'y a pas d'échelle indépendante de temps et de pression. Enfin supposons que la gravité n'intervienne pas dans cet exemple. Du coup on peut choisir $T_0 = L/V_0$ et $P_0 = \rho V_0^2$.

On obtient l'équation adimensionnée de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial \vec{\hat{v}}}{\partial \hat{t}} + (\vec{\hat{v}} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\hat{v}} = -\vec{\nabla}(\hat{p}) + \frac{1}{Re} \vec{\nabla}^2 (\vec{\hat{v}}). \quad (8.2)$$

On appelle **nombre de Reynolds** le rapport :

$$Re = \frac{V_0 L}{\nu} = \frac{\rho V_0 L}{\eta}. \quad (8.3)$$

N.B. : Dans le cas où la sphère est fixe dans l'écoulement, le terme instationnaire peut disparaître.

Il ne reste plus dans l'équation de la dynamique qu'un seul nombre sans dimension. La structure de l'écoulement ne dépend alors que de la valeur du nombre de Reynolds Re . On a en particulier deux cas limites :

- $Re \rightarrow 0$, les effets visqueux sont dominants,
- $Re \rightarrow \infty$, les effets inertiels dominent.

Le terme de Reynolds peut aussi s'écrire comme le rapport du terme (dimensionné) d'inertie sur le terme visqueux :

$$Re = \frac{\text{terme inertiel}}{\text{terme visqueux}} = \frac{|(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}|}{|\nu \vec{\nabla}^2 \vec{v}|} = \frac{V_0^2/L}{\nu V_0/L^2} = \frac{V_0 L}{\nu}.$$

8.1.1 Quelques valeurs de nombres de Reynolds

On peut facilement estimer des ordres de grandeur pour quelques écoulements :

- Une paramécie nageant dans l'eau : $Re \approx 10^{-2}$.
- Un goutte de pluie tombant dans l'air : $Re \approx 1000$.
- Sillage d'un marcheur : $Re \approx 30\,000$.
- Sillage d'une voiture : $Re \approx 4 \times 10^6$.
- Sillage d'un avion : $Re \approx 2 \times 10^8$.

• La limite $Re \rightarrow \infty$ est mathématiquement une limite singulière, car l'équation différentielle aux dérivées partielles passe alors du second au premier ordre de dérivation en espace. L'équation de Navier-Stokes est d'ordre 2 pour la dérivation en espace alors que l'équation d'Euler est d'ordre 1 en espace. Par exemple, dans le cas du sillage de la sphère, pour un fluide parfait comme il n'y a plus aucun paramètre sans dimension dans l'équation d'Euler, la solution ne doit plus dépendre d'aucun paramètre et doit en particulier être la même quelque soit la vitesse de la sphère. Une autre conséquence de ces ordres des dérivées dans les équations est que l'on a besoin de plus de conditions aux limites pour résoudre l'équation de Navier-Stokes que pour résoudre l'équation d'Euler.

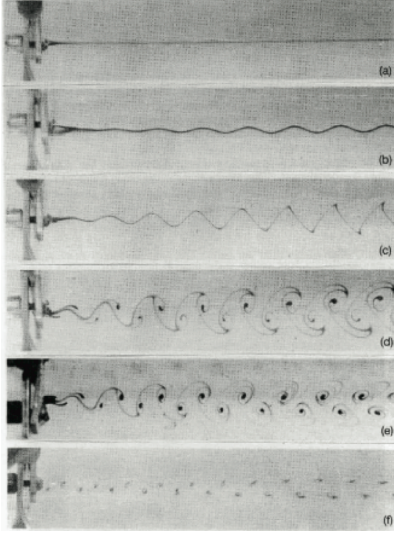


FIGURE 8.1 – Visualisation du sillage d'un cylindre par émission d'encre à travers un orifice dans le cylindre. Ce sillage serait le même pour différents diamètres, différents fluides ou différentes vitesses du moment que le nombre de Reynolds Re est le même. Le nombre de Reynolds prend de haut en bas les valeurs 30, 40, 47, 55, 67 et 100. Pour $Re > 50$ on visualise une allée de tourbillons alternés émis par le cylindre, dite *allée de tourbillons de Bénard-von Kármán*. (D'après [28] p. 25).

• A cause du terme $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$, l'équation de Navier-Stokes, comme l'équation d'Euler, sont des équations non-linéaires. En conséquence on ne peut utiliser ni le théorème de superposition ni le théorème d'unicité : pour les mêmes conditions aux limites il existe des solutions multiples. Certaines de ces solutions peuvent être stables, d'autres instables, et c'est uniquement l'ensemble des solutions qui satisfait aux symétries du problème.

8.1.2 Quelques autres nombres sans dimension

Reprenons l'adimensionnement de l'équation de Navier-Stokes. S'il apparaît dans les conditions du problème, une pression propre P_0 , un temps caractéristique des phénomènes stationnaires T , des effets de la gravité (ondes de surface par exemple), des tailles différentes en x , y ou z , l'équation de Navier-Stokes fait alors apparaître d'autres nombres sans dimension :

- Le nombre de Strouhal : $St = \frac{\text{fréquence imposée}}{\text{fréquence naturelle}} = \frac{1/T}{V_0/L} = \frac{L}{V_0 T}$.
- Le nombre de Froude : $Fr = \left[\frac{\text{forces d'inerties}}{\text{forces de gravité}} \right]^{1/2} = \frac{V_0}{\sqrt{gL}}$. L'exposant $1/2$ permet de comparer directement la vitesse de l'objet aux vitesses des ondes de gravité en eau peu profonde (voir TD

Ressaut Hydraulique).

- Le nombre d'Euler : $Eu = \frac{\text{forces de pression}}{\text{forces inertielles}} = \frac{P_0/\rho L}{V_0^2/L} = \frac{P_0}{\rho V_0^2}$.

L'équation de Navier-Stokes adimensionnée s'écrit alors :

$$St \frac{\partial \vec{v}}{\partial \hat{t}} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -Eu \vec{\nabla}(\hat{p}) + Fr^{-2} \hat{g} + \frac{1}{Re} \vec{\nabla}^2(\vec{v}).$$

Si de plus l'obstacle n'est pas une sphère, $L_x \neq L_y \neq L_z$ on peut aussi introduire des rapports d'aspect géométriques, L_x/L_z ou L_y/L_z .

8.2 Les conditions aux limites cinématiques et dynamiques

Il existe deux types de conditions aux limites que l'on doit préciser pour résoudre les équations du mouvement : les conditions aux limites cinématiques (sur la vitesse) et les conditions aux limites dynamiques (sur les forces).

8.2.1 Les conditions cinématiques

Cas d'une surface solide immobile

- Si le matériau est non poreux, alors les particules fluides ne peuvent pénétrer dans le solide et la composante de la vitesse normale à la paroi doit être nulle (pas de flux de matière) : $Q = \int \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0$, et ce quelque soit $d\vec{S}$. Soit :

$$\vec{v}_{\perp} = \vec{0}.$$

La vitesse normale à une paroi solide est nulle.

- Si le fluide est parfait (pas de viscosité, équation d'Euler), il n'y a pas d'autre condition cinématique car il peut exister des gradients de vitesse infinis entre le liquide et le solide, et dont la vitesse tangentielle à la paroi peu prendre n'importe quelle valeur.
- Si le fluide est réel (visqueux), on observe expérimentalement que les molécules de fluide au voisinage de la paroi sont en moyenne immobiles, surtout si la surface est un peu rugueuse ou si les molécules sont adsorbées sur la paroi. La vitesse tangentielle d'une particule fluide (vitesse mésoscopique) est donc nulle. C'est ce que l'on appelle *la condition de non glissement sur une paroi solide*.

$$\vec{v}_{//} = \vec{0}.$$

Notons toutefois que cette condition classique de non glissement n'est pas évidente à petite échelle. Plus précisément si on note λ le libre parcours moyen des molécules entre deux collisions, à une distance z inférieure à λ de la paroi, la moitié des particules vont vers la paroi et n'ont pas encore eu de collisions avec elle. Ces molécules ont donc toujours une composante parallèle à la surface solide $V_S = v_{//}(z = \lambda)$ alors que l'autre moitié des molécules s'éloignent de la paroi après l'avoir frappée. Si lors du choc il y a eu une adsorption temporaire des molécules sur la paroi (collision non spéculaire), il y a après le choc *en moyenne* perte de la vitesse tangentielle, $V_S = 0$. En faisant la moyenne de ces deux contributions on a donc finalement au voisinage de la paroi : $V_S = \frac{1}{2}v_{//}(z = \lambda)$. Il existe bien une vitesse de glissement à la paroi et c'est uniquement le prolongement du profil de

vitesse qui s'annule à l'intérieur du solide, à une distance $b \approx \lambda$ (Fig. 8.2). La relation de continuité du gradient de vitesse donne alors :

$$V_S = b \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_{z=0}.$$

Cela dit, dans la plupart des applications réelles le libre parcours est inférieur à 1 micromètre et la distinction reste académique. Notons toutefois quelques exceptions notoires : la microfluidique où les fluides se déplacent dans des microcapillaires où un glissement sur $1 \mu m$ n'est pas négligeable, le cas des gaz très dilués (régime de Knudsen) où le libre parcours n'est pas petit devant la taille de l'objet, ce qui augmente fortement l'effet du glissement du fluide à la paroi. On retrouve aussi de telles vitesses de glissement pour certains écoulements de polymères concentrés ou même pour des écoulements granulaires denses.

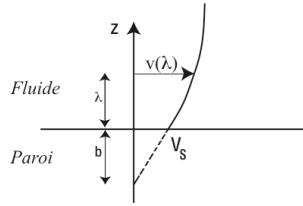


FIGURE 8.2 – Détail d'un profil de vitesse près d'une paroi mettant en évidence la vitesse de glissement $V_S = b \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_{z=0}$ où b est de l'ordre du libre parcours moyen des molécules du fluide.

Cas d'une surface solide mobile

Si la paroi se déplace les conditions aux limites sont physiquement les mêmes, mais il faut écrire la nullité des vitesses normales et tangentielles à la paroi *dans le référentiel de la paroi*, et donc égalité des vitesses normales (fluide parfait) ou égalité des vecteurs vitesses (fluide visqueux) dans le référentiel fixe :

$$v_{\perp \text{ fluide}} = v_{\perp \text{ paroi}} \text{ pour un fluide parfait}$$

$$\vec{v}_{\text{fluide}} = \vec{v}_{\text{paroi}} \text{ pour un fluide réel}$$

Cas d'une interface fluide déformable

Là encore il faut écrire une condition sur les vitesses au niveau de l'interface (figure 8.3). Tout d'abord les vitesses normales doivent être égales sinon il apparaît un espace entre les deux fluides (ou un recouvrement) :

$$(v_1)_{\perp} = (v_2)_{\perp}$$

Le calcul de cette vitesse normale fait intervenir l'équation de l'interface $\zeta(x, t)$. Le vecteur normal à l'interface a pour composantes $\vec{n} = (\sin \alpha, \cos \alpha)$ où $\tan \alpha = -\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ (figure 8.3). En égalisant

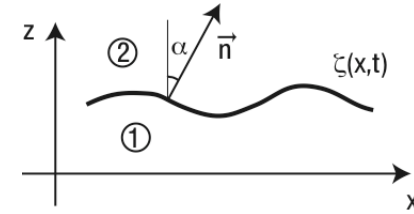


FIGURE 8.3 – Interface déformée $\zeta(x, t)$ entre deux fluides et normale locale $\vec{n}$.

les composantes normales des vitesses de l'interface et des fluides 1 et 2, $\frac{\partial \zeta}{\partial t} \cdot \vec{n} = \vec{v}_1 \cdot \vec{n} = \vec{v}_2 \cdot \vec{n}$, il vient :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} \cos \alpha = v_{1x} \sin \alpha + v_{1z} \cos \alpha = v_{2x} \sin \alpha + v_{2z} \cos \alpha,$$

soit en divisant pour $\cos \alpha$,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -v_{1x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v_{1z} = -v_{2x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v_{2z} \quad (8.4)$$

On peut aussi retrouver cette équation en écrivant qu'une particule fluide de l'interface reste à l'interface. En effet une particule M_1 de coordonnées (x_1, y_1) dans le fluide 1 est à l'interface si la distance $h = y_1 - \zeta(x_1, t)$ est nulle. Elle reste sur l'interface si $dh(x_1, y_1, t) = 0$ soit si $dh = dy_1 - \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx_1 - \frac{\partial \zeta}{\partial t} dt = 0$, c'est-à-dire si $\frac{dy_1}{dt} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{dx_1}{dt} - \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0$. Comme $\frac{dy_1}{dt} = V_{1z}$ et $\frac{dx_1}{dt} = V_{1x}$ et en faisant le même raisonnement pour une particule du milieu 2 on retrouve les équations 8.4.

Si de plus les deux fluides sont visqueux, la condition d'égalité des vitesses tangentielles à l'interface, $(v_1)_{\parallel} = (v_2)_{\parallel}$, conduit à l'égalité des vecteurs vitesses à l'interface :

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2.$$

8.2.2 Les conditions dynamiques

L'idée de base est de faire un bilan des forces qui s'appliquent à un petit volume qui entoure l'interface, puis de faire tendre la hauteur de ce volume vers zéro. Comme la masse devient nulle il faut que la somme des forces appliquées à ce petit volume soit nulle. Rappelons l'expression du tenseur des contraintes : $[\sigma] = -p[I] + [\sigma'] = [-p\delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)]$.

Cas des fluides parfaits

Il n'existe pas d'autre force que les forces de pression dans chacun des fluides ($[\sigma'] = 0$), avec éventuellement des forces interfaciales s'il existe une courbure de l'interface et une tension de surface (voir chapitre 11). Il n'existe alors que des conditions sur les pressions à la paroi :

- pour une surface solide : $P_{\text{fluide}} = P_{\text{paroi}}$
- pour une interface fluide plane : $P_{\text{fluide1}} = P_{\text{fluide2}}$

– pour une interface fluide courbée :

$$P_{fluide1} = P_{fluide2} + \gamma \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \quad (8.5)$$

où R et R' sont les deux rayons de courbure de la surface et γ la tension de surface (voir chapitre 11). C'est la loi de Laplace, qui montre que la pression est plus élevée du côté concave de la surface.

Cas des fluides réels

Il faut maintenant égaliser les contraintes tangentielles *et* les contraintes normales. Considérons successivement les trois cas suivants : une surface solide, une interface fluide plane, une interface fluide courbée.

• Cas d'une surface solide.

Montrons d'abord que dans le tenseur des gradients de vitesse, de nombreux termes sont nulles sur une paroi solide. En effet si la paroi est perpendiculaire à la direction Oz , au voisinage d'un point x on a $\vec{v}(x+dx) = \vec{v}(x) + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} dx$. Comme la vitesse à la paroi est nulle en x et aussi en $x+dx$ on en déduit : $\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = 0$. On montre de même $\frac{\partial \vec{v}}{\partial y} = 0$. En utilisant l'incompressibilité du fluide, $\text{div}(\vec{v}) = 0$, on en déduit que $\partial v_z / \partial z = 0$ au niveau de la paroi. Donc seules les composantes $\frac{\partial v_x}{\partial z}$ et $\frac{\partial v_y}{\partial z}$ peuvent ne pas être nulles et la contrainte à la paroi a alors pour composantes $\sigma_{xz} = \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} \right)$, $\sigma_{yz} = \eta \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} \right)$ et $\sigma_{zz} = -p$.

• Cas d'une interface entre deux liquides sans effet de tension de surface.

En présence de deux fluides non miscibles, on doit écrire à l'interface

$$[\sigma_1] \cdot \vec{n} = [\sigma_2] \cdot \vec{n}.$$

Dans le cas particulier où il n'y a qu'une vitesse composante de la vitesse selon x , l'égalité des contraintes tangentielles s'écrit :

$$\eta_1 \frac{\partial v_{1x}}{\partial z} = \eta_2 \frac{\partial v_{2x}}{\partial z}. \quad (8.6)$$

Les pentes des profils de vitesse de part et d'autre de l'interface sont donc dans le rapport inverse des viscosités. La pente est la plus faible dans le fluide le plus visqueux (voir figure 8.2.2 page suivante).

On appelle « surface libre » une surface sur laquelle la contrainte tangentielle est nulle. Cette condition de surface libre est souvent justifiée à l'interface entre l'air et l'eau car la viscosité dynamique de l'air est très faible devant celle de l'eau. La condition de contrainte nulle impose que la pente du profil de vitesse soit nulle. Il existe donc un maximum de la vitesse à la surface libre (figure 8.2.2).

Condition à une surface libre :

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = 0. \quad (8.7)$$

• Cas d'une interface entre deux liquides avec tension de surface

S'il existe une tension de surface, par rapport au cas précédent il se rajoute une contrainte normale proportionnelle à la courbure de l'interface (comme dans le cas de deux fluides parfaits, donné par la

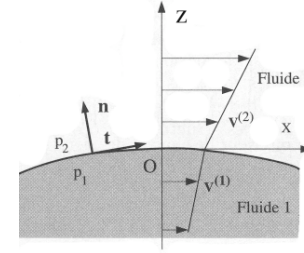


FIGURE 8.4 – Conditions aux limites cinématiques à une interface fluide.

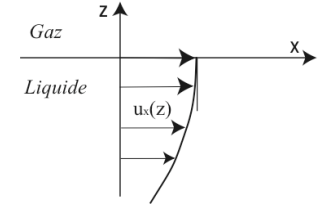


FIGURE 8.5 – Profil de vitesse au voisinage d'une surface libre, c'est-à-dire si la contrainte du gaz sur le liquide peut être négligée.

loi de Laplace (Equ. 11.1)) plus éventuellement une contrainte tangentielle s'il existe un gradient de tension de surface. Un tel gradient existe sous l'action d'un gradient de température, ou d'un gradient de concentration en produit tensioactif. On parle alors d'effet Marangoni (voir [15] p. 155 ou [3] p. 69).

8.2.3 Tableau récapitulatif des conditions aux limites

Voici un tableau résumant les différentes conditions aux limites, pour un fluide parfait et pour un fluide réel.

Interface	Fluide parfait (Euler)	Fluide visqueux (Navier-Stokes)
Paroi solide	$(v_{\perp})_{\text{fluide}} = (v_{\perp})_{\text{paroi}}$ $p_{\text{fluide}} = p_{\text{paroi}}$	$\vec{v}_{\text{fluide}} = \vec{v}_{\text{paroi}}$ $p_{\text{fluide}} = p_{\text{paroi}}$ $\sigma_{xz} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z}$
Interface plane	$(v_{\perp})_1 = (v_{\perp})_2$ $p_1 = p_2$	$\vec{v}_1 = \vec{v}_2$ $p_1 = p_2$ $\eta_1 \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} \right)_1 = \eta_2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} \right)_2$
Interface déformée avec tension de surface	$(v_{\perp})_1 = (v_{\perp})_2$ $P_1 = P_2 + \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$	$\vec{v}_1 = \vec{v}_2$ $(\sigma_{ij} n_j)_1 - (\sigma_{ij} n_j)_2 = -\gamma \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) n_i + \left\{ \vec{\nabla} \gamma \right\}_i$

Chapitre 9

Solutions laminaires de l'équation de Navier-Stokes

Sommaire

9.1 Les écoulements parallèles	83
9.1.1 Ecoulement de Couette plan	84
9.1.2 Ecoulement de Couette circulaire	84
9.1.3 Ecoulement de Poiseuille plan	85
9.1.4 Ecoulement sur un plan incliné	85
9.1.5 Ecoulement de Poiseuille en conduite circulaire	85
9.1.6 Solutions instationnaires	87
9.2 Les écoulements à très faibles nombre de Reynolds	87
9.2.1 Equation de Stokes	87
9.2.2 Ecoulement autour d'une sphère : force de Stokes	89
9.2.3 La sédimentation	91
9.2.4 La réversibilité et la vie aux faibles nombres de Reynolds	93
9.3 Les écoulements quasi-parallèles : les équations de la lubrification	94
9.3.1 Calcul d'un palier lubrifié	96

Dans ce chapitre nous allons parler des écoulements laminaires (par opposition à turbulents), c'est-à-dire des écoulements où le fluide s'écoule en « lame » parallèles. Ce sont en général les écoulements que l'on observe quand le fluide est peu sollicité c'est-à-dire lorsque le nombre de Reynolds n'est pas trop élevé.

9.1 Les écoulements parallèles

On appelle écoulements *parallèles* des écoulements unidirectionnels et invariants le long de l'écoulement. Ce sont des écoulements "1C1D" ($\vec{v} = \{u(y), 0, 0\}$) ou "1C2D" ($\vec{v} = \{u(y, z), 0, 0\}$). Cette propriété impose automatiquement $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = 0$, le terme non-linéaire de l'équation de Navier-Stokes disparaît donc. De plus, on a obligatoirement par construction la conservation de la masse $\text{div}(\vec{v}) = 0$. Voyons quelques exemples.

9.1.1 Ecoulement de Couette plan

On cherche l'écoulement établi (indépendant du temps) entre deux plaques parallèles dont l'une se déplace dans son plan à la vitesse U_0 . On suppose $\vec{v} = \{u(y), 0, 0\}$ et l'on néglige la gravité. L'équation de Navier-Stokes se ramène alors à :

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Comme u ne dépend pas de x , $\frac{\partial p}{\partial x}$ n'en dépend pas non plus. C'est une constante qui ne peut dépendre ni de y ni de z puisque p n'en dépend pas ($\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0$). Cette constante sera nulle s'il n'y a pas de gradient de pression imposé à l'infini par les conditions aux limites. Nous le supposons et on trouve, en tenant compte des conditions aux limites $u = 0$ en $y = 0$ et $u = U_0$ en $y = h$:

$$u(y) = \frac{U_0}{h} y.$$

Le gradient de vitesse est constant partout dans l'écoulement (figure 9.1). C'est un écoulement de cisaillement pur (somme d'un écoulement de déformation pure et de rotation pure).

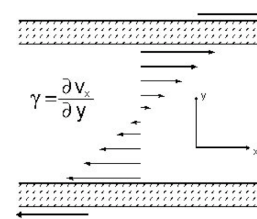


FIGURE 9.1 – Géométrie et profil de vitesse de l'écoulement de Couette plan, ici avec deux vitesses de paroi égales et opposées.

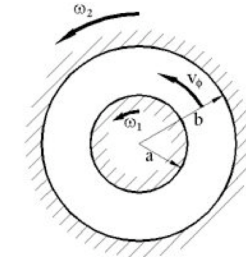


FIGURE 9.2 – Géométrie de Couette cylindrique.

9.1.2 Ecoulement de Couette circulaire

Cherchons maintenant l'écoulement axisymétrique purement azimutal existant entre deux cylindres coaxiaux. Le même raisonnement nous conduit à l'équation $\nu \nabla^2 \vec{v} = 0$. En coordonnées cylindriques on trouve alors :

$$v_\theta = Ar + \frac{B}{r} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{v_\theta^2}{r}.$$

Les valeurs de A et B sont données par les conditions aux limites cinématiques aux parois en $r = R_1$ et $r = R_2$ (figure 9.2).

9.1.3 Écoulement de Poiseuille plan

Supposons maintenant que nous ayons deux plaques parallèles et immobiles et qu'en appliquant un gradient de pression on crée un écoulement visqueux selon la direction x . Le même système d'équation que pour le calcul de l'écoulement de Couette plan nous montre que

$$\frac{\partial p}{\partial x} = Cste = -\frac{P_{entrée} - P_{sortie}}{L} = -G.$$

G est le gradient de pression imposé. On en déduit que le profil de vitesse est parabolique :

$$u(y) = \frac{G}{2\eta}y(h-y). \quad (9.1)$$

Ce profil parabolique porte le nom d'écoulement de Poiseuille ou de Hagen-Poiseuille (Figure 9.3).

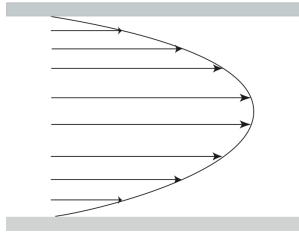


FIGURE 9.3 – Profil parabolique de Poiseuille entre deux plaques ou dans une conduite circulaire.

Le débit volumique par unité de largeur dans la troisième dimension est donc donné par :

$$Q_v = \int_0^h u(y)dy = \frac{h^3}{12\eta}G. \quad (9.2)$$

9.1.4 Écoulement sur un plan incliné

Exercice : Calculer le profil de vitesse d'une couche de fluide d'épaisseur h coulant sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Montrer en particulier que la condition de surface libre impose que le profil de vitesse est une demi parabole.

9.1.5 Écoulement de Poiseuille en conduite circulaire

Exercice : Refaire le calcul du profil de Poiseuille pour une conduite de section circulaire. On montrera que

$$u(r) = \frac{G}{4\eta}(R^2 - r^2) \quad (9.3)$$

et que le débit volumique vaut :

$$Q_v = \frac{\pi R^4}{8\eta}G. \quad (9.4)$$

Attention, une des conditions aux limites est donnée par le fait que l'on ne veut pas de vitesse infinie sur l'axe ($r = 0$).

Ainsi à gradient de pression constant, si le diamètre du tube diminue d'un facteur 2, le débit est divisé par 16 ! Cette forte non-linéarité explique la difficulté d'équilibrer les réseaux de distribution d'eau par exemple. De même il faut 10 000 tubes de 1 mm de rayon pour faire s'écouler le même débit sous la même différence de pression que dans un tube de rayon 1 cm. Jean-Louis Marie POISEUILLE était d'ailleurs un médecin physiologiste qui s'est intéressé dans les années 1850 aux écoulements sanguins.

On peut aussi calculer les contraintes visqueuses appliquées sur les parois du tube, $\sigma'_{zr} = -GR/2$ et en déduire que les forces appliquées par le liquide sur une longueur de tube sont logiquement égales à la différence des forces de pression appliquées entre ses deux extrémités.

La relation 9.4 n'est valable que si l'écoulement reste laminaire. Au-dessus d'un certain nombre de Reynolds de l'ordre de quelques milliers ce n'est plus vrai. Il apparaît d'autres composantes de la vitesse et un régime turbulent. C'est en étudiant cette transition que O. Reynolds a montré que cette transition était gouvernée par un nombre sans dimension qui porte maintenant son nom. La turbulence de l'écoulement augmente la dissipation d'énergie et donc le gradient de pression, c'est-à-dire la différence de pression entre l'entrée et la sortie aussi appelée en hydraulique la *perte de charge* (figure 9.4).

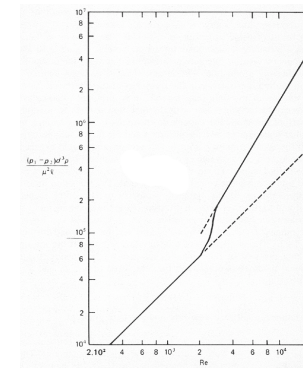


FIGURE 9.4 – Transition laminaire/turbulent de l'écoulement de Poiseuille. Variation du gradient de pression moyen adimensionné $G \frac{d^3 p}{\eta^2}$ en fonction du nombre de Reynolds Re . Lignes pointillées : écoulement laminaire ($G \frac{d^3 p}{\eta^2} = 32 Re$) ou complètement turbulent. Ligne continue : un exemple de cas réel. D'après [28] p. 20.

9.1.6 Solutions instationnaires

Mise en mouvement d'une plaque

Supposons maintenant que dans un milieu infini on mette brutalement une plaque en mouvement dans son plan. Si les effets de la gravité sont négligeables et si l'écoulement est invariant dans la direction du mouvement (il n'y aura donc pas de gradient de pression longitudinal), l'équation de Navier-Stokes se réduit à :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \nabla^2 u. \quad (9.5)$$

On reconnaît là une équation de diffusion. Le coefficient de diffusion de la quantité de mouvement est ν , la viscosité cinématique. On peut adimensionner cette équation

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} = \frac{\nu \tau}{\delta^2} \hat{\nabla}^2 \hat{u}.$$

On trouve alors que le temps caractéristique de diffusion sur une distance δ est :

$$\tau = \frac{\delta^2}{\nu}. \quad (9.6)$$

Dans le cas du démarrage brutal de la plaque à la vitesse U_0 dans un fluide au repos, on trouve par intégration la solution de l'équation de diffusion :

$$u(y) = U_0 \left[1 - \operatorname{erf} \left[\frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \right] \right]$$

où erf est la **fonction « erreur »** (intégrale d'une gaussienne : $\operatorname{erf}(X) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^X \exp(-x^2) dx$).

Mise en mouvement d'un fluide entre deux parois

Dans le cas de l'écoulement de Couette plan il faut un temps $\tau \sim h^2/\nu$ pour que le profil linéaire s'établisse (figure 9.5). Soit une longueur de déplacement de la plaque $X = U_0 \tau \sim Re h$.

Dans un tube, pour obtenir un profil parabolique il faut attendre un temps $\tau \sim R^2/\nu$, c'est-à-dire une distance depuis l'entrée du tube $X \approx Re R$. C'est-à-dire que dès que le nombre de Reynolds est élevé la *longueur d'entrée* avant l'établissement du profil parabolique est loin d'être négligeable (figure 9.6). Expérimentalement on trouve plutôt $X \approx Re R/30$.

9.2 Les écoulements à très faibles nombre de Reynolds

9.2.1 Equation de Stokes

Dans les écoulements strictement parallèles le terme $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$ est géométriquement nul. Si le nombre de Re est très faible (effets importants de la viscosité) le terme inertiel peut être négligé même si l'écoulement n'est pas du tout parallèle.

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla}(p) + \vec{g} + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{v}. \quad (9.7)$$

C'est en quelque sorte la limite opposée à l'équation d'Euler.

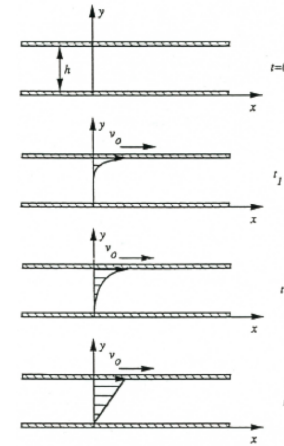


FIGURE 9.5 – Écoulement instationnaire en géométrie de Couette plan. Evolution du profil de vitesse entre deux plaques parallèles infinies. La plaque supérieure est mise en translation à vitesse uniforme à l'instant $t = 0$.

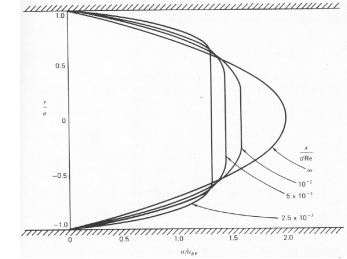


FIGURE 9.6 – Profils de vitesse laminaires à diverses distances de l'entrée d'une conduite circulaire. D'après [28], p. 15.

Nous supposons dans la suite que la seule force volumique est la force de gravité. On peut alors introduire le potentiel $\Phi = \vec{g} \cdot \vec{r}$ (alors $\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi$). De plus nous supposons que le nombre de Stokes qui compare le terme instationnaire aux termes visqueux est très petit :

$$St = \frac{\|\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\|}{\|\nu \vec{\nabla}^2 \vec{v}\|} = \frac{L^2}{\nu T} \ll 1.$$

Formellement le nombre de Stokes apparaît comme le produit du nombre de Strouhal déjà rencontré (§ 8.1.2) et du nombre de Reynolds. On obtient alors l'équation de Stokes :

$$\vec{\nabla}(p + \rho\Phi) = \eta \vec{\nabla}^2 \vec{v}. \quad (9.8)$$

Cette équation est exacte en toute rigueur pour un écoulement stationnaire et si $Re \rightarrow 0$. Une des propriétés des écoulements de Stokes est l'absence d'inertie. Dès que les causes du mouvement disparaissent, l'écoulement s'arrête sans délai. Ces écoulements dissipent extrêmement rapidement leur énergie cinétique.

Il existe d'autres formes équivalentes de l'équation de Stokes :

– Première variante :

$$\vec{\nabla}(p + \rho\Phi) = -\eta \vec{\nabla} \operatorname{rot}(\vec{\omega}). \quad (9.9)$$

En effet $\vec{\nabla}^2 \vec{v} = \vec{\nabla}(\text{div}(\vec{v})) - \text{rot}(\text{rot}(\vec{v}))$, or $\text{div}(\vec{v}) = 0$ pour un fluide incompressible et l'on écrit $\vec{\omega} = \text{rot}(\vec{v})$ la vorticité.

- Deuxième variante en prenant la divergence de l'équation précédente :

$$\boxed{\nabla^2(p + \rho\Phi) = 0} . \quad (9.10)$$

En effet on a $\nabla^2(p + \rho\Phi) = \text{div}(\vec{\nabla}(p + \rho\Phi))$ et $\text{div}(\text{rot}(\vec{v})) = 0$.

La pression satisfait donc à une équation de Laplace à très faible nombre de Reynolds.

- Troisième variante :

$$\boxed{\vec{\nabla}^2(\vec{\omega}) = 0} . \quad (9.11)$$

En effet $\vec{\nabla}^2(\vec{\omega}) = \vec{\nabla}[\text{div}(\text{rot}(\vec{v}))] - \text{rot}(\text{rot}(\vec{\omega})) = -\text{rot}(\text{rot}(\vec{\omega})) = \frac{1}{\eta} \text{rot}[\vec{\nabla}(p + \rho\Phi)] = 0$. Ceci montre qu'à très faible nombre de Reynolds, il n'y a plus transport de la vorticité. la vorticité est dans un état d'équilibre et ne diffuse plus.

L'équation de Stokes étant linéaire il y a unicité de la solution une fois connues les conditions aux limites. De plus on montre que l'écoulement de Stokes est celui qui minimise la dissipation d'énergie (cf [15] p. 443-452).

9.2.2 Écoulement autour d'une sphère : force de Stokes

Nous allons montrer, dans la limite des nombres de Reynolds tendant vers 0, que la force de traînée visqueuse exercée sur une sphère de rayon R par un fluide s'écoulant à la vitesse $\vec{U}$ s'écrit :

$$\boxed{\vec{F}_{St} = 6\pi\eta R\vec{U}} \quad (9.12)$$

C'est ce que l'on appelle la force de Stokes (1851).

Démonstration

Les hypothèses sont $Re \ll 1$ et écoulement stationnaire $St \ll 1$. Nous pouvons alors utiliser l'équation de Stokes (Equ. 9.8) :

$$\vec{\nabla}(p + \rho\Phi) = \eta \vec{\nabla}^2 \vec{v}.$$

Nous allons travailler en coordonnées sphériques avec une sphère immobile dans un écoulement homogène de vitesse à l'infini U , dirigé selon Oz (figure 9.7). Nous supposons un écoulement axisymétrique autour de Oz (nous aurons alors $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$) et que $u_\varphi = 0$. L'écoulement est alors 2C2D stationnaire et s'écrit en coordonnées sphériques : $\vec{u} = u_r(r, \theta) \vec{e}_r + u_\theta(r, \theta) \vec{e}_\theta$.

Les conditions aux limites sont :

$$\begin{cases} \vec{u} = \vec{0} & \text{en } r = R \\ \vec{u} = U \vec{z} & \text{en } r \rightarrow \infty \end{cases}$$

Soit $u_r = u_\theta = 0$ en $r = R$ et $u_r = U \cos \theta$ et $u_\theta = -U \sin \theta$ en $r \rightarrow \infty$.

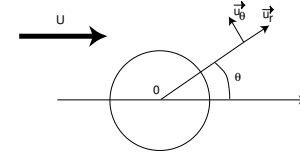


FIGURE 9.7 – Coordonnées sphérique autour d'une sphère. L'écoulement est selon Oz .

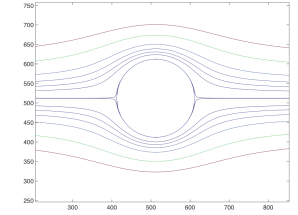


FIGURE 9.8 – Lignes de courant autour d'une sphère immobile pour un écoulement de Stokes.

En introduisant la fonction de Stokes en coordonnées sphériques (Equation 1.3) on peut résoudre le problème (figure 9.8) et l'on trouve $\Psi = U \sin^2 \theta \left(\frac{L}{r} + Mr^2 + C \frac{r}{2} \right)$ avec L , M et C trois constantes à déterminer pour satisfaire les conditions aux limites. On trouve alors

$$\Psi = -\frac{1}{2} U r^2 \sin^2 \theta \left(1 - \frac{3}{2} \frac{R}{r} + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3} \right).$$

On trouve finalement le champ de vitesse partout autour de la sphère (cf. [1] p. 223, [15] p. 465) :

$$\begin{cases} p(r, \theta) &= P_0 - \frac{3}{2} \frac{\eta U R}{r^2} \cos \theta \\ u_r(r, \theta) &= U \cos \theta \left[1 - \frac{3}{2} \frac{R}{r} + \frac{R^3}{2r^3} \right] \\ u_\theta(r, \theta) &= -U \sin \theta \left[1 - \frac{3}{4} \frac{R}{r} - \frac{R^3}{4r^3} \right] \end{cases} \quad (9.13)$$

Ces équations montrent que le champ de vitesse décroît très doucement à grande distance (en $1/r$). Ce qui fait que l'écoulement est très influencé par des parois même lointaines ou d'autres particules en mouvement (cas de la sédimentation de particules).

A partir du champ de vitesse nous pouvons maintenant calculer les composantes du tenseur des contraintes $[\sigma]$ en coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} &= 2\eta \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{3} \eta (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - p \\ \sigma_{\theta\theta} &= 2\eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) - \frac{2}{3} \eta (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - p \\ \sigma_{\phi\phi} &= 2\eta \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta \cot \theta}{r} \right) - \frac{2}{3} \eta (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - p \\ \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} &= \eta \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \\ \sigma_{\theta\phi} = \sigma_{\phi\theta} &= \eta \left(\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{u_\varphi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) \\ \sigma_{r\phi} = \sigma_{\phi r} &= \eta \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\varphi}{r} \right) \right) \end{cases} \quad (9.14)$$

Le fluide étant incompressible, $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$. De plus, sur la sphère $u_r = u_\theta = u_\varphi = 0$ et $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$. On en déduit les contraintes sur la sphère :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \sigma_{rr} & = & -p \\ \sigma_{\theta\theta} & = & -p \\ \sigma_{\phi\phi} & = & -p \\ \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} & = & \eta \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \\ \sigma_{\theta\phi} = \sigma_{\phi\theta} & = & 0 \\ \sigma_{\phi r} = \sigma_{r\phi} & = & 0 \end{array} \right. \quad (9.15)$$

On peut ensuite calculer la composante selon l'axe Oz de la contrainte : $\sigma_z = ([\sigma] \cdot \vec{n}) \cdot \vec{e}_z = \sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta$, et l'on trouve : $\sigma_z = \frac{3\eta U}{2R}$ en tout point de la sphère (quelque soit θ).

Et donc $F_z = \oint \sigma_z dS = \sigma_z 4\pi R^2 = 6\pi\eta RU$. C'est la force de Stokes exercée par un fluide visqueux sur une sphère.

Exercice :

- Vérifier que la force transverse (portance) est bien nulle comme l'impose ici la symétrie de l'écoulement.

- Montrer que pour une bulle sphérique (surface libre) : $\vec{F}_z = -4\pi\eta R\vec{U}$.

Coefficient de traînée C_D

Pour les écoulements à grand nombre de Reynolds on introduit souvent le coefficient de traînée C_D (sans dimension). Il est défini par

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U_0^2 S} \quad (9.16)$$

où S est la section de l'objet et F_D la force de traînée (*drag* en anglais, d'où le D). En identifiant ici avec l'expression de la force de Stokes, on trouve :

$$C_D = \frac{24}{Re} \quad (9.17)$$

où le nombre de Reynolds est calculé sur le diamètre ($2R$) de la sphère. La figure 9.9 montre que l'expression de la force de Stokes est une bonne approximation de la force de traînée jusqu'à $Re \sim 1$. Au delà, la correction analytique d'Oseen permet d'écrire à l'ordre suivant ($Re < 5$) :

$$C_D = \frac{24}{Re} \left[1 + \frac{3}{16} Re \right] \quad (9.18)$$

A plus haut nombre de Reynolds encore on peut trouver d'autres formules empiriques pour C_D (§ 2.2).

9.2.3 La sédimentation

Une sphère unique placée dans un fluide va sédimenter si sa densité est supérieure à la densité du fluide. Après une phase initiale d'accélération elle va ensuite sédimenter à sa vitesse limite de chute. La valeur du nombre de Reynolds calculé avec cette vitesse de chute va permettre de savoir si c'est

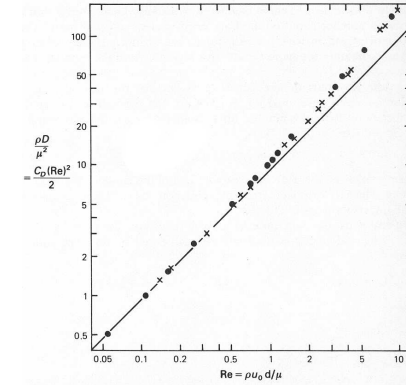


FIGURE 9.9 – Traînée sur une sphère à faible nombre de Reynolds (attention C_D est ici multiplié par $\pi/4$). D'après Réf. [28] p. 111.

un vitesse de chute visqueuse ou inertielle. Dans le premier cas il y a égalité entre le poids apparent (poids corrigé de la poussée d'Archimède) et la force de Stokes :

$$g(\rho_s - \rho_f) \frac{4}{3} \pi R^3 = 6\pi\eta R V_{Stokes},$$

soit

$$V_{Stokes} = \frac{2}{9} \frac{\Delta\rho g}{\eta} R^2, \quad (9.19)$$

avec $\Delta\rho = \rho_s - \rho_f$. Cette vitesse limite de chute est dite vitesse limite de Stokes. Elle est proportionnelle au carré du rayon, donc les grosses particules sédimenteront plus vite. Ce résultat reste vrai même si les particules ne sont pas parfaitement sphériques.

En réalité, les toutes petites particules ($\sim 1 \mu m$) dites **particules colloïdales** ou **particules browniennes** ne sédimenteront pratiquement pas à cause de l'agitation thermique (la vitesse aléatoire moyenne devient supérieure à la vitesse de sédimentation).

Pour que le nombre de Reynolds de chute soit petit et que l'on puisse utiliser la formule de la force de Stokes il faut :

$$Re = \frac{2R V_{Stokes}}{\nu} = \frac{4}{9} \frac{\Delta\rho g R^3}{\rho \nu^2} \ll 1,$$

soit :

$$R \ll \left(\frac{9}{4} \frac{\rho \nu^2}{\Delta\rho g} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Si maintenant beaucoup de particules sédimenteront ensemble, le calcul de la vitesse de sédimentation se complique nettement (il n'est d'ailleurs pas résolu à ce jour). En effet il existe des interactions collectives (à N corps) car le champ de vitesse autour d'une particule décroît lentement (en $1/r$) et des effets dus à la taille finie du récipient (effet de paroi). De fait la sédimentation d'un grand

nombre de particules crée un contre-écoulement du fluide vers le haut qui ralentit leur chute (une jolie démonstration en est l'effet Boycott observé lorsque l'on incline le récipient). La vitesse est alors une fonction de la concentration en particules :

- A faible Reynolds, Albert Einstein (1905) a donné le premier terme correctif à la vitesse limite de chute dépendant de la concentration c en particules : $V_{lim} \approx V_{Stokes} [1 - 6,55 c]$.
- Au-delà on utilise la loi empirique de Richardson-Zaki, $V_{lim} = V_{Stokes} [1 - c/c_{max}]^n$ où $n \approx 5$, mais dépend du nombre de Reynolds et c_{max} est la compacité maximum, de l'ordre de 54 % pour un empilement aléatoire lâche de sphères identiques.

9.2.4 La réversibilité et la vie aux faibles nombres de Reynolds

Si $Re \ll 1$ les termes inertiels sont négligeables et l'équation de la dynamique se réduit à l'équation 9.7. Si de plus l'écoulement est stationnaire (ou à un nombre de Stokes très petit) on retrouve l'équation 9.8. Cette équation $\vec{\nabla} \cdot (p + \rho\Phi) = \eta \vec{\nabla}^2 \vec{v}$ est une équation **réversible**, ce qui a d'importantes conséquences. En effet, la transformation $\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$ transforme $(p + \rho\Phi)$ en $-(p + \rho\Phi)$.

Voyons quelques exemples et contre-exemples :

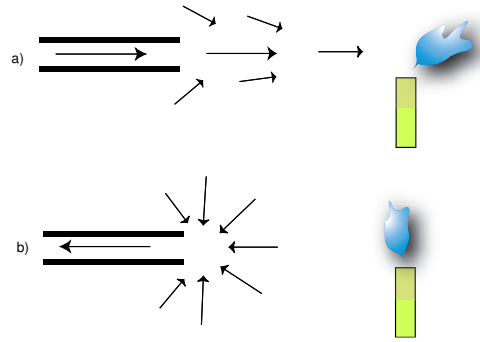


FIGURE 9.10 – Un exemple d'irréversibilité des écoulements, ou pourquoi il est plus facile d'éteindre une bougie en soufflant (a) qu'en aspirant (b) !

- Cas d'une bille tombant à coté d'un mur vertical. La réversibilité impliquant que le mouvement vers le bas est identique à un mouvement vers le haut, la bille doit tomber parallèlement à la paroi. A faible Reynolds et en régime stationnaire une bille n'est ni repoussée ni attirée par la paroi.
- Si maintenant on regarde le mouvement d'une bille s'approchant d'une paroi horizontale, ou s'en éloignant, ces mouvements ne sont pas identiques car dans les deux cas il y a des forces d'accélération (instationnarité) donc des effets de masse ajoutée et des forces d'histoire.
- Expérience de G.I. Taylor. Une tâche de colorant dans un fluide visqueux placé dans l'espace entre deux cylindres d'un montage de Couette circulaire est déformée par l'écoulement. Mais quelques tours en sens contraire reconstituent la forme initiale de la tâche (aux effets de diffusion moléculaire près) si la viscosité du liquide est suffisamment forte.

- Chaos lagrangien. On peut avoir le mélange de deux fluides dans un écoulement à faible nombre de Reynolds, mais uniquement près des points cols, là où les termes instationnaires sont importants.

L'article de Purcell [24] est une excellente lecture introductive au sujet de la réversibilité des écoulements et de sa conséquence pour la vie animale aux faibles nombres de Reynolds. Je vous en recommande vivement la lecture.

9.3 Les écoulements quasi-parallèles : les équations de la lubrification

Dans les écoulements de Stokes ($Re \ll 1$) (voir § 9.2.1) et dans les écoulements parallèles (voir § 9.1), le terme inertiel $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$ de l'équation de Navier-Stokes est soit négligeable soit exactement nul. Dans de nombreux cas l'écoulement est *presque* parallèle, c'est-à-dire qu'une composante de la vitesse domine devant les autres et que les angles entre les parois sont faibles. Ces écoulements dits *lubrifiés* sont parfois appelés *écoulements rampants* (*creeping flow* en anglais).

Comme les lignes de courants sont parallèles aux parois, elles font un angle θ faible avec l'axe des x (figure 9.11). On peut alors calculer des *ordres de grandeur* (noté ODG) des différents termes des équations du mouvement.

Prenons le cas de l'écoulement à deux dimensions (2C2D) entre deux parois : $\vec{u} = (u_x(x, y), u_y(x, y), 0)$ et appelons U l'ODG des vitesses horizontales et e_0 l'ODG des épaisseurs. Comme l'écoulement est laminaire, les lignes de courant sont pratiquement parallèles aux parois et donc presque parallèles à l'axe des x , on a : $u_x \approx U$ et $u_y \approx U\theta$.

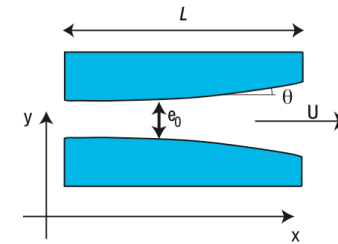


FIGURE 9.11 – Schéma d'un écoulement quasi-parallèle lubrifié.

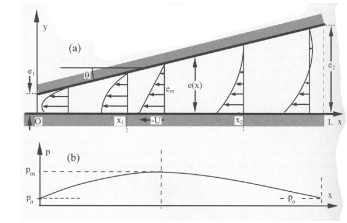


FIGURE 9.12 – Schéma du palier lubrifié lorsque le plan inférieur se déplace de droite à gauche. (a) Profils de vitesse, (b) profil de pression. (D'après [15] p. 228).

Comme nous le verrons, l'écoulement étant localement la superposition d'un écoulement de Poiseuille ou de Couette, on peut estimer ses dérivées transverses :

$$\begin{cases} ODG(\frac{\partial u_x}{\partial y}) &= \frac{U}{e_0} \\ ODG(\frac{\partial u_y}{\partial y}) &= \frac{U\theta}{e_0} \end{cases}$$

En dérivant encore un fois ces expressions selon y , il vient :

$$\begin{cases} ODG(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}) &= \frac{U}{e_0^2} \\ ODG(\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}) &= \frac{U\theta}{e_0^2} \end{cases}$$

La conservation de la masse nous donne

$$ODG\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right) = ODG\left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right) = \frac{U\theta}{e_0}$$

Pour les dérivées secondes, on a en dérivant l'équation de continuité :

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \sim \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y}$$

et

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} \sim \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \sim \frac{U\theta}{e_0^2}.$$

Reportons ces termes dans la projection selon x de l'équation de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + \left(u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y}\right) u_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right).$$

ODG $\left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \sim \frac{U^2 \theta}{e_0}$. Pour calculer l'ODG du terme visqueux il nous manque encore l'ODG du terme $\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}$. Nous avons $\frac{\partial u_x}{\partial x} \sim \frac{U\theta}{e_0}$, et en supposant une échelle de variation horizontale L il vient : $\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \sim \frac{U\theta}{e_0 L}$.

Du coup $\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$ si $e_0 \theta / L \ll 1$ ce qui est vérifié jusqu'à l'ordre 2. Alors ODG $\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right) \sim \frac{U}{e_0^2}$.

Les termes inertiels seront alors négligeables devant les termes visqueux si

$$U^2 \theta / e_0 \ll \nu U / e_0^2$$

soit

$$(U e_0 / \nu) \theta = Re \theta \ll 1,$$

où Re est un nombre de Reynolds construit sur la vitesse U et la largeur e_0 . Cette équation est un compromis entre la condition des écoulements parallèles ($\theta = 0$ et Re en principe quelconque¹) et la condition des écoulements de Stokes ($Re \ll 1$ et θ quelconque).

En étudiant ensuite la projection de Navier-Stokes sur y on peut montrer que

$$\frac{\partial p}{\partial y} \ll \frac{\partial p}{\partial x}.$$

On obtient alors le système suivant pour résoudre l'écoulement :

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

à condition de pouvoir négliger les termes instationnaires ce qui est le cas si le nombre de Stokes est petit ($St = \frac{e_0^2}{\nu T} \ll 1$). On peut alors intégrer l'équation de Stokes pour u_x selon y (variation rapide) en négligeant les variations de p avec y . On trouve une fonction du second ordre en y , ce qui dans le cas général correspond à une superposition d'un écoulement de Couette et de Poiseuille.

1. Dans la pratique inférieur à quelques milliers car sinon l'écoulement peut devenir instable et transiter brutalement vers un état turbulent, c'est-à-dire où la vitesse fluctue fortement dans le temps en un point donné.

Ayant obtenu cette vitesse horizontale $u_x(x, y)$ en fonction du gradient local de pression $\partial p / \partial x$ on peut intégrer u_x à x fixé pour obtenir le débit Q en fonction du gradient longitudinal de pression et de la géométrie $e(x)$. Le fait que le débit Q est indépendant de x permet alors d'exprimer le gradient local de pression en fonction de Q et de trouver $p(x)$ et donc Q par intégration en x à condition de connaître les conditions aux limites sur p . Finalement on peut réinjecter ce résultat dans l'équation donnant la vitesse, et tout calculer explicitement, comme dans l'exemple ci-dessous.

9.3.1 Calcul d'un palier lubrifié

On considère le mouvement horizontal d'un bloc au-dessus d'un plan, ce bloc faisant un petit angle θ avec le plan (figure 9.12).

Exercice : Montrer que si l'on note respectivement e_1 et e_2 les épaisseurs minimum et maximum de la couche $\theta = (e_2 - e_1) / L$, on a pour les forces tangentielle et normale :

$$\begin{aligned} F_T &= - \left[6 + 2 \ln \left(\frac{e_2}{e_1} \right) \right] \frac{\eta U}{\theta} \\ F_N &= 6 \left[\ln \left(\frac{e_2}{e_1} \right) - 2 \right] \frac{\eta U}{\theta^2} \end{aligned} \quad (9.20)$$

En particulier montrer que $\frac{F_N}{F_T} \sim 1/\theta$ est grand, ce qui est recherché dans les paliers lubrifiés pour supporter de lourdes charges sans consommer trop de puissance. C'est le même phénomène qui sustente les planches de bois qui servent à glisser dans quelques centimètres d'eau sur les plages à marée basse, ou qui cause l'aquaplaning sur une route mouillée.

Chapitre 10

La couche limite

Version du 1^{er} juillet 2010

Sommaire

10.1 Introduction	97
10.1.1 Définitions de l'épaisseur de couche limite	97
10.2 Couche limite laminaire d'un fluide incompressible sur une plaque plane	99
10.2.1 Les équations de Prandtl (1904)	99
10.2.2 Profil de vitesse de Blasius (1907)	100
10.2.3 Calcul de la contrainte pariétale et du coefficient de traînée	101
10.3 Couche limite turbulente	102
10.4 Couche limite sur une paroi courbée : décollement et contrôle de la couche limite	102

On pourra lire avec profit les documents suivants : [15] p. 507, [4] p. 321, [20] p. 299 et [6] tome II p. 86, et le chapitre correspondant dans le DVD [17].

10.1 Introduction

La compréhension du comportement des couches limites date du début du XX^{ème} siècle. Les travaux de Prandtl ont permis une avancée majeure dans l'histoire de la mécanique des fluides.

Nous avons déjà évoqué quelques phénomènes de couches limites lors de l'établissement de l'écoulement de Poiseuille ou de Couette, ou du démarrage d'une plaque plane au § 9.1.6. Il existe alors deux domaines : l'un loin des parois où l'écoulement n'est pas encore modifié et où la viscosité n'a aucune influence, l'autre près de la paroi où la quantité de mouvement diffuse en racine du temps à cause de la viscosité. En passant d'une description temporelle à une description spatiale on voit apparaître deux échelles de longueur très distinctes, une grande dans le sens de l'écoulement et une petite dans la direction transverse à la paroi. L'étude de la couche limite laminaire, par exemple sur une plaque plane comme schématisée sur la figure 10.1, est le but de ce chapitre.

10.1.1 Définitions de l'épaisseur de couche limite

On peut définir plusieurs échelles caractérisant l'épaisseur typique des couches limites présentes à haut nombre de Reynolds près des parois solides.

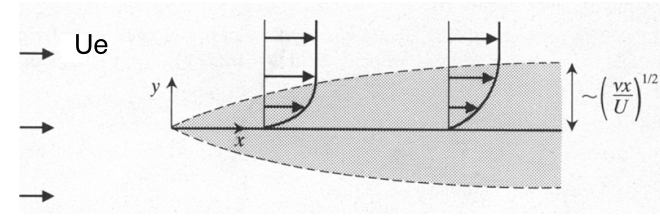


FIGURE 10.1 – Écoulement de couche limite au voisinage d'une plaque plane. D'après [1] p. 49.

– Epaisseur $\delta_{0,99}$ de la couche limite

Cette épaisseur $\delta_{0,99}(x)$ correspond à la distance de la plaque où la vitesse longitudinale atteint 99% de la vitesse à l'infini U_e .

$$u[x, \delta_{0,99}(x)] = 0,99 U_e.$$

Pour un écoulement uniforme sur une plaque plane on trouve : $\delta_{0,99}(x) \approx 5\sqrt{\nu x/U_e}$.

– Epaisseur de déplacement δ^*

L'épaisseur de déplacement correspond au déplacement latéral de la paroi qu'il faudrait effectuer dans un écoulement uniforme pour avoir le même débit massique dans l'hypothèse d'un fluide parfait (glissement à la paroi). Pour un fluide incompressible le débit massique s'écrit :

$$Q/\rho = \int_0^\infty u(y)dy = \int_{\delta^*}^\infty U_e dy,$$

en appelant U_e la vitesse longitudinale loin de la paroi.

Un petit schéma montre que l'on a égalité des aires et donc :

$$U_e \delta^* = \int_0^\infty (U_e - u)dy.$$

On peut donc finalement écrire :

$$\delta^*(x) = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u(x,y)}{U_e}\right) dy.$$

Pour un écoulement uniforme arrivant sur une plaque plane on trouve : $\delta^*(x) \approx 1,73\sqrt{\nu x/U_e}$.

– Epaisseur de quantité de mouvement δ^{**}

Cette épaisseur est construite avec le flux de quantité de mouvement :

$$\delta^{**} = \int_0^\infty \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy.$$

Pour un écoulement uniforme sur une plaque plane on trouve : $\delta^{**}(x) \approx 0,66\sqrt{\nu x/U_e}$.

En résumé pour une plaque plane dans un écoulement laminaire uniforme, on peut définir plusieurs épaisseurs caractéristiques et l'on a : $\delta_{0,99} > \delta^* > \delta^{**}$. Il faut toutefois remarquer qu'aucune de ces définitions de la frontière de la couche limite ne correspond à une ligne de courant.

10.2 Couche limite laminaire d'un fluide incompressible sur une plaque plane

L'hypothèse de base est que, loin des parois, l'écoulement est laminaire et n'est pas influencé par la viscosité. On a alors affaire à un fluide parfait, qui satisfait à l'équation d'Euler et à l'équation de Bernoulli. Près de la plaque au contraire, l'écoulement est dominé par les termes visqueux. Cette couche limite est d'épaisseur variable $\delta(x)$ mais faible et l'on pourra faire les approximations des écoulements quasi-parallèles. Le raisonnement est aussi valable si la paroi est légèrement courbée, à condition que le rayon de courbure soit grand devant l'épaisseur de la couche limite.

10.2.1 Les équations de Prandtl (1904)

Près de la paroi on suppose que l'écoulement est 2D2C, $\vec{u}(x, y) = (u, v, 0)$ avec les conditions aux limites $\vec{u} = \vec{0}$ pour $y = 0$ et $u = U_e(x)$ pour $y \rightarrow +\infty$ (figure 10.1) et l'on mène un calcul similaire à celui d'un écoulement de lubrification (§ 9.3 page 94).

La conservation de la masse, $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$, nous permet une estimation des ordres de grandeur : $u/x_0 \approx v/\delta$, où x_0 est l'abscisse du point considéré par rapport au bord d'attaque de la plaque. Donc la vitesse transverse est négligeable devant la vitesse longitudinale lorsque $\delta \ll x_0$.

Ecrivons l'équation de Navier-Stokes d'un écoulement stationnaire pour les deux composantes u et v .

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (10.1)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (10.2)$$

Le terme visqueux a été simplifié pour tenir compte du fait que $\delta \ll x_0$ et donc que les dérivées secondes en y dominent.

Comme $v \ll u$, les termes où la vitesse intervient dans l'équation selon y (10.2) sont d'un ordre de grandeur inférieurs aux termes correspondant de la première équation (10.1). On en déduit que $\frac{\partial p}{\partial y} \ll \frac{\partial p}{\partial x}$. Les gradients de pression transverses sont faibles et au premier ordre la pression ne varie que selon x , soit $p \approx p(x)$. En particulier la pression dans la couche limite est la même que dans l'écoulement extérieur. C'est à cause de cette propriété qu'un tube de Pitot peut être utilisé pour mesurer la vitesse dans un fluide (cf 6.3.1 page 55). En effet la pression mesurée à la paroi est pratiquement la même que celle qui existe au-delà de la couche limite ($\frac{\partial p}{\partial y} \approx 0$). De même c'est parce que les couches limites sont minces que les équations d'Euler donne la bonne portance pour une aile d'avion en incidence malgré la présence de couches limites attachées (cf 6.3.5 page 58).

Les termes visqueux sont dominants dans la couche limite, les termes inertiels le sont en dehors de cette couche. Les deux termes sont du même ordre de grandeur à une distance δ de la surface solide si :

$$U_e^2/x_0 \approx \nu U_e/\delta^2, \text{ où } x_0 \text{ est la distance au bord d'attaque de l'obstacle. Soit si}$$

$$\delta(x_0) = \sqrt{\nu x_0 / U_e}.$$

L'épaisseur de la couche limite croît lentement, en racine de la distance selon x . Si on introduit un nombre de Reynolds longitudinal construit sur la distance x_0 du début de la couche limite, $Re_{x_0} = U_e x_0 / \nu$, on a :

$$\frac{\delta(x_0)}{x_0} = \frac{1}{\sqrt{Re_{x_0}}}.$$

Si ce nombre de Reynolds est élevé, on a bien $\delta \ll x_0$. En particulier l'analyse n'est plus valable si x_0 est petit, c'est-à-dire très près du bord d'attaque de la plaque.

En dehors de la couche limite, la viscosité étant négligeable, l'équation de Bernoulli nous donne $p(x) + \rho U_e^2(x)/2 = Cste$ sur une ligne de courant. Nous avons ici traité le cas général où l'écoulement externe $U_e(x)$ peut dépendre de x . Soit :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = U_e(x) \frac{\partial U_e}{\partial x}. \quad (10.3)$$

On peut donc remplacer dans l'équation de Navier-Stokes et l'on obtient l'équation de Prandtl de la couche limite :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e(x) \frac{\partial U_e}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (10.4)$$

10.2.2 Profil de vitesse de Blasius (1907)

Si maintenant l'écoulement externe est homogène, $U_e(x) = U_e = Cste$, l'équation 10.4 se simplifie en :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

et elle admet une solution auto-similaire.

Pour le montrer, posons $X = x/x_0$, $Y = y/\delta(x)$, $U = u/U_e$ et $V = v/(\frac{U_e}{\sqrt{Re_{x_0}}})$. La conservation de la masse et l'équation de la dynamique de la composante longitudinale s'écrivent alors :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (10.5)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \quad (10.6)$$

Ces équations ne contiennent plus aucun paramètre (ni U_e , ni Re_{x_0}). Il existe une solution auto-similaire, $U = f(\theta)$ avec $\theta = Y/\sqrt{X} = y/\delta(x)$ avec pour condition aux limites : $f(0) = 0$ et $f(\infty) = 1$. Attention $\theta \neq Y = y/\delta(x_0)$!

En exprimant $\frac{\partial V}{\partial Y}$ par l'équation de continuité (10.5) et en intégrant par partie cette expression on obtient formellement $V(X, \theta)$ que l'on peut injecter dans l'équation 10.6.

On en déduit l'équation intégral-différentielle satisfaite par f :

$$2f'' + f' \int_0^Y f(\zeta) d\zeta = 0.$$

Si on introduit la fonction $F(Y) = \int_0^Y f(\zeta) d\zeta$ cette nouvelle équation peut s'écrire :

$$2F''' + F''F = 0. \quad (10.7)$$

C'est l'équation de Blasius.

Cette équation s'intègre numériquement et donne alors le profil de vitesse longitudinale dans la couche limite (figure 10.2a). Le profil de vitesse est très linéaire dans la couche limite et transite rapidement (exponentiellement) vers l'asymptote.

Pour Y petit, on peut écrire un développement de Taylor. On a $f(0) = 0$ et en utilisant l'équation intégral-différentielle, $f''(0) = 0$. En dérivant 10.7 on montre de plus que $f'''(0) = 0$. Le développement limité s'écrit donc :

$$f(Y) = Y f'(0) + bY^4 + O(Y^5).$$

En reportant dans l'équation de Blasius on trouve $b = -\frac{1}{48} f'^2(0)$.

Numériquement l'on trouve $f'(0) = 0,332 \approx 1/3$ soit

$$\frac{u}{U_e} = \frac{1}{3} \frac{y}{\delta(x)} - \frac{1}{432} \left[\frac{y}{\delta(x)} \right]^4 + \dots$$

De plus $f(Y = 5) \approx 0,99$ soit $\delta_{0,99} = 5\delta$.

L'écartement progressif des lignes de courant (en $\sqrt{x}$) est dû à l'existence d'une petite composante de vitesse transverse (dans et hors de la couche limite) que l'on peut calculer explicitement en utilisant la conservation de la masse (figure 10.2b).

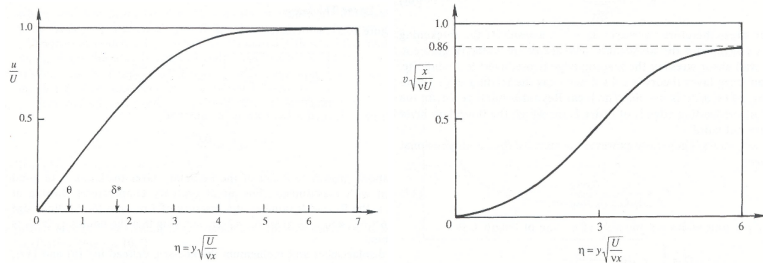


FIGURE 10.2 – Profil de vitesse de Blasius. a) vitesse longitudinale $U = f(Y)$, b) vitesse transverse $V = f'(Y)$. D'après [20] p. 311.

10.2.3 Calcul de la contrainte pariétale et du coefficient de traînée

La connaissance explicite de la vitesse dans la couche limite permet de calculer la contrainte locale de frottement visqueux sur la paroi.

$$\sigma_{xy} = \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \approx \eta U_e f'(0) \frac{\partial Y}{\partial y} = \eta U_e f'(0) \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}} \approx \frac{1}{3} \frac{\rho U_e^2}{\sqrt{Re_{x0}}}.$$

On en déduit la force de traînée visqueuse par unité de largeur et par face d'une plaque de longueur L :

$$F_D = \int_0^L \sigma_{xy} dx = 2\rho U_e^2 L f'(0) \frac{1}{\sqrt{Re_L}}.$$

La force de traînée varie donc comme $U_e^{3/2}$ et comme $L^{1/2}$. La dépendance avec la vitesse en puissance 3/2 est clairement intermédiaire avec le cas très visqueux (force de Stokes) où elle est proportionnelle à U_e et le cas des Reynolds très élevés où l'écoulement est turbulent et où elle varie comme le carré de la vitesse. La dépendance avec la longueur en puissance 1/2 fait que si L double, la force de traînée ne double pas. La contribution aux frottements des zones en amont de la plaque sont donc plus importantes que celles des zones en aval (où le cisaillement est moins intense).

Si on introduit le coefficient de traînée adimensionné, on trouve :

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho U_e^2 L} = \frac{4}{3} \frac{1}{\sqrt{Re_L}}.$$

Résultat qu'il faut multiplier par 2 si l'on veut tenir compte des deux faces de la plaque. Lorsque le nombre de Reynolds est élevé, ce coefficient de traînée est très faible, mais la couche limite peut aussi devenir turbulente.

A. N. Calculer la force de traînée d'une plaque de $1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$ tirée à incidence nulle à une vitesse de 1 m/s dans de l'eau.

10.3 Couche limite turbulente

Si l'épaisseur de la couche limite est très faible, il existe un très fort cisaillement entre la vitesse nulle sur la paroi et la vitesse U_e hors de la couche limite. Ce cisaillement peut devenir tellement important que l'écoulement laminaire se déstabilise et devient turbulent. Ceci est observé si le nombre de Reynolds transverse calculé avec l'épaisseur de la couche limite $Re_y = U_e \delta / \nu$ est suffisamment grand. Or

$$Re_y = U_e \delta / \nu = U_e \sqrt{\frac{\nu x}{U_e}} / \nu = \sqrt{\frac{U_e x}{\nu}} = \sqrt{Re_x}.$$

La couche limite laminaire transite vers une couche limite turbulente si $Re_y \approx 300$ (ce qui correspond à $Re_x \approx 10^5$). On voit alors apparaître des ondes transverses dites « ondes de Tollmien-Schlichting » qui se déstabilisent en « épingles à cheveux », puis des tâches turbulentes apparaissent qui finalement envahissent toute la couche limite. Le profil de vitesse dans une couche limite turbulente est plus arrondi que dans une couche limite laminaire. On trouve en général un profil de vitesse logarithmique :

$$\bar{u}/u^* \approx 2,5 \ln \left(\frac{yu^*}{\nu} \right) + 5.$$

10.4 Couche limite sur une paroi courbée : décollement et contrôle de la couche limite

S'il existe un écoulement extérieur non uniforme (par exemple parce que la surface est fortement courbée ou que l'écoulement se situe dans un convergent ou un divergent) il existe des gradients

de pression longitudinaux positifs ou négatifs qui interviennent dans l'équation de la couche limite (équation 10.1).

- Si l'écoulement accélère, d'après l'équation de Bernoulli valable au-delà de la couche limite (équation 10.3), on a $\frac{\partial p}{\partial x} < 0$. Le fluide est accéléré par ce gradient de pression, v devient négatif et la couche limite s'amincit.
- Par contre si $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$, le fluide est décéléré et comme près de la paroi il était déjà ralenti l'écoulement peut changer de sens près de la paroi (figure 10.3). C'est ce que l'on appelle le décollement de la couche limite, une transition très importante par exemple pour les avions car il correspond à une perte brutale de portance (décrochage).

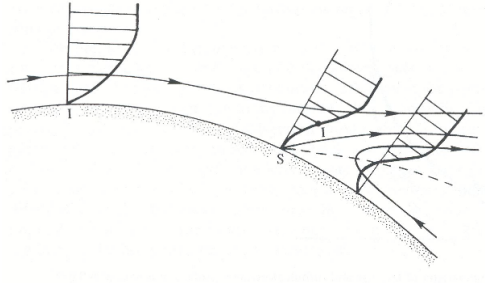


FIGURE 10.3 – Lignes de courant et profils de vitesse près d'un point de séparation S. La ligne pointillée représente le lieu où $u = 0$. D'après [20] p. 319.

C'est le même phénomène que le marin cherche à visualiser sur ses voiles en y collant des brins de laine sur l'intrados et sur l'extrados (figure 10.4).

Le décollement des couches limites induit un sillage important et donc une forte augmentation de la traînée de pression. Il est donc très important de bien profiler l'arrière des obstacles. Le fait de profiler un véhicule par exemple permet de faire baisser la force de traînée d'un facteur 10 à 100 ! Il existe de nombreux dispositifs pour essayer de contrôler le décollement des couches limites : volets de bord d'attaque ou de bord de fuite sur les ailes à l'atterrissage, aspiration ou soufflage des couches limites, profilage des véhicules, alules sur les ailes de certains oiseaux planeurs (figure 10.5), etc.

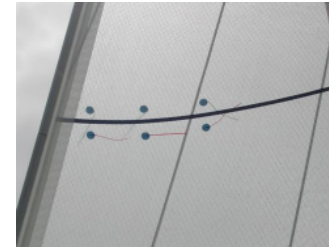


FIGURE 10.4 – Brins de laine placés sur l'extrados et l'intrados (près du bord d'attaque) d'une voile d'avant d'un voilier naviguant au près et qui permettent de visualiser le décollement des couches limites.

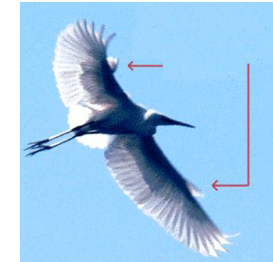


FIGURE 10.5 – Aigrette en vol montrant ses alules utilisées volontairement pour recoller la couche limite et donc augmenter la portance à basse vitesse.

Chapitre 11

La tension de surface

Sommaire

11.1 Origine microscopique	105
11.2 La loi de Laplace	108
11.3 Angle de contact entre 3 phases	109
11.3.1 Loi d'Young-Dupré	109
11.4 La longueur capillaire (effet de la gravité)	110
11.5 La mesure de la tension superficielle	111
11.5.1 La loi de Jurin	111
11.5.2 Lame de Wilhelmy et anneau de Noüy	113
11.5.3 Méthode de la goutte pendante	113
11.6 Effets de la température	113
11.7 Les tensioactifs	114
11.7.1 Pourquoi met-on du savon pour se laver les mains ?	114
11.7.2 Pourquoi peut-on faire des membranes de savon et pas des membranes d'eau ?	114

A petite échelle les forces de tension interfaciale ne peuvent être négligées. Ce sont elles par exemple qui expliquent comment les araignées d'eau marchent sur l'eau (figure 11.1) ou pourquoi nos cheveux sont collés entre eux en sortant de l'eau (figure 11.2). Le phénomène existe à toutes les interfaces de deux corps immiscibles (qui ne se mélangent pas) : solide/solide ou solide/liquide ou solide/gaz ou liquide/liquide ou liquide/gaz. C'est-à-dire dans tous les cas où il existe une frontière nette entre deux milieux. Par contre la tension de surface est nulle entre deux gaz car ils sont miscibles : par agitation thermique les molécules se mélangent.

11.1 Origine microscopique

Les phénomènes de tension de surface, aussi appelés phénomènes capillaires ou interfaciaux trouvent leur origine dans les forces intermoléculaires attractives qui existent dans toutes phases condensées de la matière. Une molécule loin de toute surface a de nombreuses voisines (entre 6 et 10 premières voisines) donc une forte énergie d'interaction. Par contre une molécule en surface a moitié moins de voisines, donc moitié moins d'énergie d'interaction (figure 11.3). Tout ce passe comme s'il avait fallu casser un certain nombre de liaisons, ce qui a un coût en énergie. L'énergie pour fabriquer



FIGURE 11.1 – Un gerris posé à la surface d'un étang.



FIGURE 11.2 – Effet des forces capillaires sur un pinceau sec, immergé ou mouillé. (D'après [30], p. 12).

une surface E_S est égale à ce coût par molécule multiplié par le nombre de molécules en surface (lui-même proportionnel à la surface S). On écrit donc

$$E_S = \gamma S.$$

Le coefficient de proportionnalité γ s'appelle la tension de surface ou tension interfaciale. C'est une énergie par unité de surface (grandeur intensive) mais comme nous le verrons ce coefficient peut aussi être interprété comme une force par unité de longueur. La tension de surface s'exprime en J/m^2 ou en N/m .

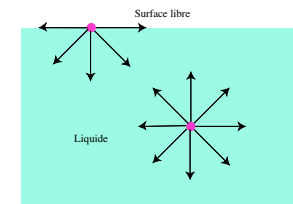


FIGURE 11.3 – Différence entre les forces d'interaction entre molécules à la surface et au sein d'un liquide.



FIGURE 11.4 – Effet des forces capillaires en apesanteur sur le whisky du capitaine Haddock dans "On a marché sur la lune".

Quelques ordres de grandeur de tension interfaciale à $20^\circ C$: $\gamma_{\text{air-eau}} = 72 \text{ mN/m}$, $\gamma_{\text{Hg-air}} = 490 \text{ mN/m}$, $\gamma_{\text{éthanol-air}} = 22 \text{ mN/m}$.

En conséquence, pour minimiser son énergie de surface un fluide va avoir tendance à minimiser sa surface et donc à prendre une forme sphérique en l'absence d'autres contraintes comme la gravité (figure 11.4). De même une membrane de savon portée par un contour va réaliser une *surface minimale*, c'est-à-dire une surface dont l'aire est la plus faible possible (figures 11.5 et 11.6).

La figure 11.7 montre qu'il existe une force qui tend à minimiser la surface de la membrane de savon, c'est-à-dire une surface dont l'aire est minimale. En tirant avec une force f sur la ficelle

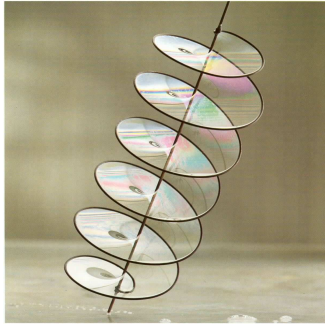


FIGURE 11.5 – Exemple de surface minimale portée par une hélice et son axe.

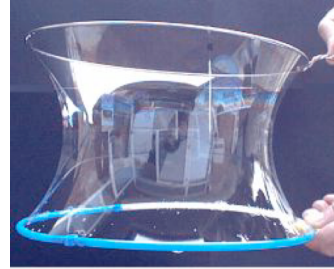


FIGURE 11.6 – La caténoïde, surface minimale portée par deux anneaux.

centrale on fournit un travail $dW = f dl = \gamma dS$ et l'on peut donc augmenter la surface. Cette action est réversible.

La surface d'un liquide est donc un lieu de contrainte. Tout segment $\vec{dl}$ de cette surface est soumis dans une direction perpendiculaire à $\vec{dl}$ mais tangente à la surface à des forces égales et opposées si la surface est à l'équilibre. On peut facilement rompre cet équilibre en diminuant localement la tension de surface, par exemple si le liquide est de l'eau en touchant la surface avec du savon ce qui diminue localement la tension de surface. L'équilibre est alors rompu et le fluide en surface se déplace brutalement radialement vers la zone de plus forte tension de surface.

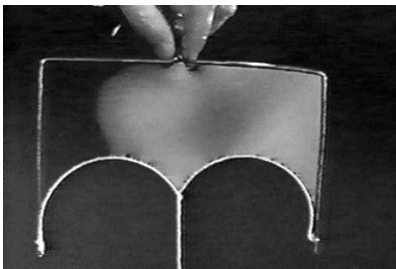


FIGURE 11.7 – Démonstration de l'existence des forces capillaires. Les deux bouts de la ficelle sont en forme d'arcs de cercle. Pourquoi ?

11.2 La loi de Laplace

Si une surface est courbée les contraintes de traction existant sur la surface ont une composante non nulle dans la direction normale à la surface et orientée vers le centre de courbure, c'est-à-dire du côté concave de la surface. A l'équilibre cette force normale est compensée par une pression plus forte du côté intérieur que du côté extérieur.

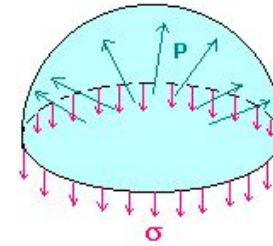


FIGURE 11.8 – Illustration de l'effet de la surpression de Laplace Δp .

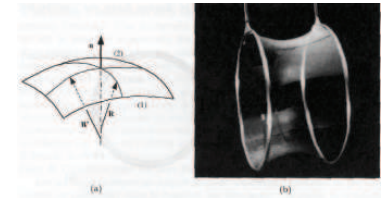


FIGURE 11.9 – Notion de rayon de courbure, d'après [15] p. 56.

Prenons l'exemple d'une goutte sphérique (figure 11.8). La force dirigée vers le haut due à la surpression à l'intérieur de la goutte, $\Delta P \pi R^2$, doit être égale à la somme des forces de tension de surface sur l'équateur $\gamma 2\pi R$. Soit pour une goutte sphérique :

$$\Delta p = p_{int} - p_{ext} = 2\frac{\gamma}{R}.$$

Dans le cas général on montre que la loi de Laplace, formulée pour la première fois en 1806 par Pierre-Simon de Laplace, s'écrit en chaque point d'une surface courbée :

$$p_{int} - p_{ext} = \gamma \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right]. \quad (11.1)$$

où R_1 et R_2 sont les deux rayons de courbure géométrique de la surface en ce point. En effet pour tout point d'une surface courbe on peut définir la normale et donc des plans contenant cette normale. Chacun de ces plans coupe la surface selon une courbe dont on peut déterminer le centre de courbure et le rayon de courbure (figure 11.9). Les deux rayons R_1 et R_2 sont mesurés dans deux plans perpendiculaires. On montre que la somme de ces rayons de courbure, appelé **courbure géométrique** ou **courbure moyenne** $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ est indépendante du choix des deux plans perpendiculaires, c'est un invariant de la surface.

Notons qu'une surface peut avoir une courbure nulle, c'est le cas d'un point selle (auss appelé point col), en effet les rayons de courbure sont des quantités algébriques, comptées positives si le centre de courbure est situé du côté défini comme intérieur. Dans le cas du point selle les pressions de chaque côté de la surface sont égales. Les figures 11.5 et 11.6 sont des exemples de surface de courbure nulle en tout point.

En conséquence de la loi de Laplace, plus une goutte est petite plus le fluide à l'intérieur est à une pression élevée. Les petites bulles sont donc bien sphériques et peu déformables. Attention toutefois pour les bulles de savon la tension de surface agit des deux cotés des membranes (il y a en effet deux surfaces eau-gaz) il apparaît donc un facteur 2 dans la relation de Laplace : $\Delta P = 4\gamma/R$. Cette surpression dans les petites bulles a de nombreuses conséquences, par exemple pour la cavitation, l'ébullition ou la formation de brouillards.

11.3 Angle de contact entre 3 phases

Dans de nombreux cas trois phases, solide-liquide-gaz par exemple, sont présentes. Il peut alors exister une ligne triple stable où les trois tensions de surface doivent s'équilibrer.

Prenons le cas d'une goutte liquide posée sur un substrat et notons θ l'angle de contact (figures 11.10 et 11.11). La goutte peut s'étaler plus ou moins sur le support, on dit qu'on est en situation **mouillante** si θ est faible, de situation de **mouillage partiel**, ou encore de situation **non mouillante** si θ est élevé ($90^\circ < \theta < 180^\circ$).

L'angle θ est appelé l'angle de mouillage apparent macroscopique. En effet il n'est pas forcément défini au niveau microscopique (il peut par exemple exister un film précurseur). Notons que cet angle peut être multivalué et dépendre du mouvement passé de la goutte. S'il est mesuré pendant le mouvement de la goutte on parle d'angle dynamique de contact. L'hystérésis de l'angle de contact est particulièrement visible pour une goutte de pluie accrochée sur un parebrise de voiture. Le fait que la goutte ne glisse pas malgré la pente vient du fait que l'angle au bord le plus haut de la goutte est plus faible qu'en bas.

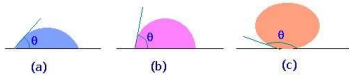


FIGURE 11.10 – Liquide partiellement mouillant une paroi et de moins en moins mouillant de (a) à (c).

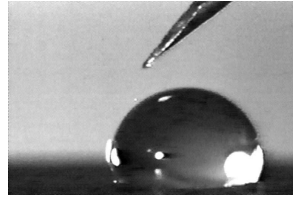


FIGURE 11.11 – Goutte d'eau sur une surface cirée.

11.3.1 Loi d'Young-Dupré

Pour une goutte posée sur une surface solide indéformable, l'équilibre des forces sur une longueur $d\ell$ de la ligne de contact et dans le plan tangent à la surface s'écrit (figure 11.12a) :

$$\sum df = \gamma_{SL} d\ell + \gamma_{LG} \cos \theta d\ell - \gamma_{GS} d\ell = 0,$$

Où γ_{ij} est la tension de surface entre la phase i et j . Soit :

$$\gamma_{SL} + \gamma_{LG} \cos \theta = \gamma_{GS}.$$

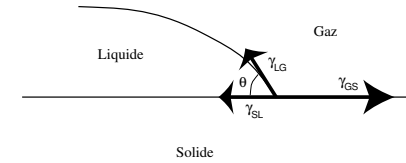


FIGURE 11.12 – Equilibre des forces de tension de surface au niveau de la ligne triple pour (a) une goutte posée sur une surface solide (relation d'Young-Dupré) ou (b) pour une goutte posée sur un autre liquide.

C'est la loi d'Young-Dupré. Comme

$$\cos \theta = \frac{\gamma_{SG} - \gamma_{LS}}{\gamma_{LG}},$$

l'angle θ n'est pas défini si $\frac{\gamma_{SG} - \gamma_{LS}}{\gamma_{LG}} < -1$, on parle alors de **non mouillage** ($\theta = 180^\circ$), ou si $\frac{\gamma_{SG} - \gamma_{LS}}{\gamma_{LG}} > 1$ et l'on parle alors de **mouillage total** ($\theta = 0^\circ$). Dans le premier cas $\gamma_{LS} > \gamma_{SG} + \gamma_{LG}$ et le système préfère minimiser l'aire de contact liquide-solide qui coûte trop d'énergie. On parle alors de mouillage nul. C'est ce que l'on essaye de réaliser sur des vêtements imperméables en les enduisant de produit déperlant ou dans le fond des poêles en utilisant des revêtements au Téflon. Dans le second cas $\gamma_{SG} > \gamma_{SL} + \gamma_{LG}$ le contact solide-gaz coûte beaucoup trop d'énergie et c'est le liquide qui va séparer les deux phases. C'est ce que l'on appelle le **mouillage total**.

Note : La composante transverse appliquée par l'interface gaz-liquide $\gamma_{LG} \sin \theta$ sur la surface solide est ici équilibrée par la rigidité de ce solide. Dans le cas où l'on a deux liquides et un gaz, par exemple une lentille d'huile à la surface de l'eau, il n'existe pas un tel plan de contact (figure 11.12b). Il faut alors aussi écrire l'équilibre des forces verticales (figure 11.12b).

11.4 La longueur capillaire (effet de la gravité)

Si l'on observe une grosse goutte posée sur une surface horizontale, elle n'a pas une forme sphérique, elle est aplatie. Il existe un compromis entre la gravité qui tend à abaisser le centre de gravité de la goutte et la tension de surface qui tend à rendre la goutte sphérique (figure 11.13). Ce compromis est caractérisé par un nombre sans dimension, le nombre de Bond, rapport de l'énergie de gravité sur l'énergie de tension superficielle :

$$Bo = \frac{\rho g}{\gamma} R^2.$$

Ce nombre de Bond est aussi le rapport de deux longueurs $Bo = (R/l_c)^2$. La longueur $l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$ est appelée *longueur capillaire*. Pour cette taille les effets de gravité et de tension de surface sont comparables. Si $R \gg l_c$ les effets de gravité dominent, si $R \ll l_c$ ce sont les effets superficiels.

• Pour de l'eau dans l'air par exemple on trouve $l_c \approx 3$ mm. On retrouve cette taille caractéristique en regardant la surface de l'eau au bord d'un verre de rayon R (figure 11.14). Loin du bord la surface est horizontale ($R \gg l_c$) mais près de la paroi verticale ($R \ll l_c$) la tension de surface fait monter l'eau qui mouille partiellement le verre ($\theta < 90^\circ$).

• On retrouve aussi cette longueur capillaire $l_c \approx 3$ mm dans la taille typique des gouttes d'eau (figure 11.15), ou des premières rides observées sur l'eau lorsque le vent se lève (voir chapitre ?? page ??).



FIGURE 11.13 – Déformation sous l'effet de la gravité de gouttes de mercure de tailles croissantes. D'après [15] p. 57.

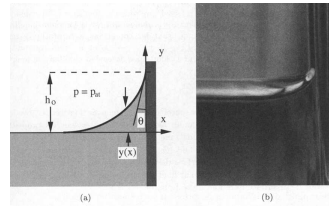


FIGURE 11.14 – Ménisque sur le bord d'un verre d'eau. D'après [15] p. 59.

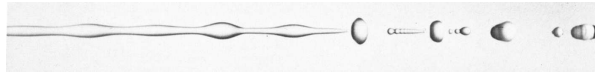


FIGURE 11.15 – Instabilité de Plateau-Rayleigh d'un jet d'eau tombant (ici de gauche à droite) et qui se fractionne en gouttes.

11.5 La mesure de la tension superficielle

Il existe de nombreuses méthodes pour mesurer la tension de surface, basées en général sur la mesure d'une force.

11.5.1 La loi de Jurin

Si on plonge un tube fin (on parle de tube "capillaire", c'est-à-dire dont le diamètre intérieur est de l'ordre de grandeur du diamètre d'un cheveu) dans un liquide, à l'équilibre la surface du liquide dans le tube n'est pas au même niveau qu'à l'extérieur (figures 11.16 et 11.17). C'est l'illustration classique des forces capillaires, autre nom des forces de tension interfaciales.

Le calcul de la hauteur h d'ascension capillaire se fait en calculant la dépression Δp qui existe au-dessous du ménisque : $\Delta p = 2\gamma/r$ où r est le rayon de courbure de la calotte sphérique que forme le ménisque. Si R est le rayon du tube et θ l'angle de mouillage on a $R = r \cos \theta$ et donc $\Delta p = 2\gamma \cos \theta / R$. Cette dépression tire la colonne de fluide vers le haut et donc $\Delta p = \rho g h$. Finalement

$$h = \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho g R}.$$

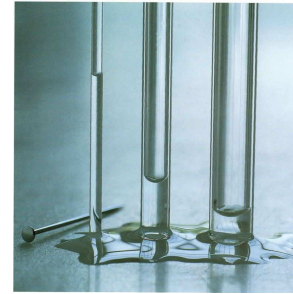


FIGURE 11.16 – Illustration de la loi de Jurin ([30], p. 13). Plus le tube est fin plus le liquide monte haut.

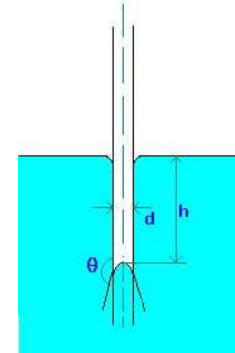


FIGURE 11.17 – Cas d'un liquide non mouillant comme le mercure montrant une ascension négative.

A.N. Avec de l'eau, si $R = 0,1$ mm, on trouve $h = 14$ cm. La mesure de h est donc une mesure de la tension de surface si on connaît l'angle de mouillage θ et le diamètre du capillaire.

Exercice : Si on fait l'expérience non pas dans un tube, mais entre deux plaques de verre au contact d'un côté mais espacées de l'épaisseur d'un trombone de l'autre (figure 11.18) qu'elle sera la forme de la surface libre ?

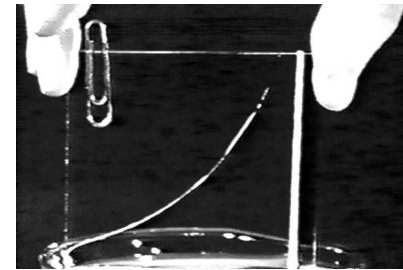


FIGURE 11.18 – Ascension capillaire dans le diédre formé par un trombone placé entre deux plaques de verre.

L'ascension capillaire est limitée pour l'eau à environ 10 mètres, ce qui correspond à un tube de rayon de l'ordre d'un micromètre. En effet au-delà de cette hauteur la pression sous le ménisque deviendrait inférieure à la pression de vapeur saturante. Ce phénomène intervient dans la montée de la sève dans les arbres et est en partie la cause de leur taille maximale de l'ordre de quelques dizaines

de mètres (voir par exemple le site <http://www.cndp.fr/revueTDC/890-72856.htm>).

11.5.2 lame de Wilhelmy et anneau de Noüy

Les tensiomètres modernes sont basés sur la mesure d'une force d'arrachement s'exerçant sur une lame ou un anneau de platine que l'on sort délicatement du liquide. Juste avant que le film liquide qui tire l'objet vers le bas ne casse, la balance mesure une force (de l'ordre de 1 g) proportionnelle à la tension de surface (figures 11.19 et 11.20) : $\gamma = F/(p \cos \theta)$ si p est le périmètre de la lame. On peut aussi mesurer par cette méthode des forces interfaciales entre deux liquides.

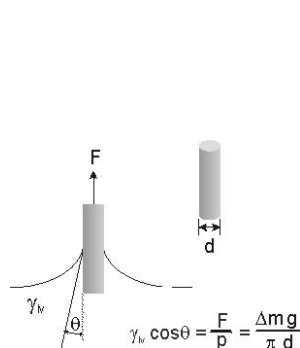


FIGURE 11.19 – Mesure de la tension de surface par la méthode de la lame de Wilhelmy.

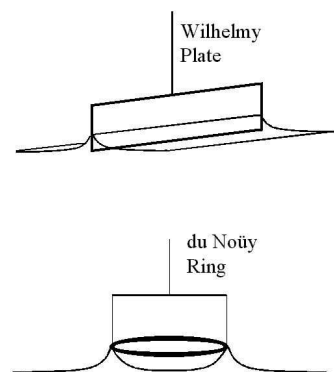


FIGURE 11.20 – Méthode de l'anneau de Noüy.

11.5.3 Méthode de la goutte pendante

Juste avant qu'une goutte ne se détache d'un robinet, son poids est équilibré par la tension de surface. La mesure du volume de la goutte ou de son poids est donc aussi une mesure précise de la tension de surface (figures 11.21 et 11.22).

11.6 Effets de la température

La tension de surface est en général une fonction décroissante de la température, en effet elle s'annule au point critique (liquide et vapeur ne font plus qu'un, ils sont alors en quelque sorte miscibles). Cette variation explique les deux expériences suivantes (figures 11.23 et 11.24). Les endroits de faible tension de surface sont des zones de divergence de l'écoulement de surface et conduisent donc à l'amincissement de la couche fluide, alors qu'une zone de forte tension interfaciale est une zone de convergence et donc d'épaississement.

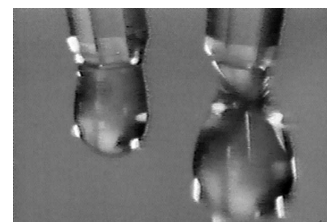


FIGURE 11.21 – Une goutte d'alcool (à gauche) et une goutte d'eau (à droite) sur le point de se détacher.



FIGURE 11.22 – Détachement d'une goutte pendante ([30], p. 8).

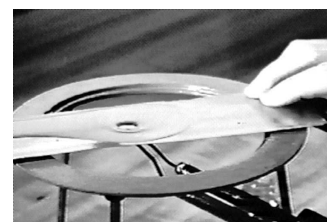


FIGURE 11.23 – Effet d'un point chaud fixe sous une couche mince de liquide.

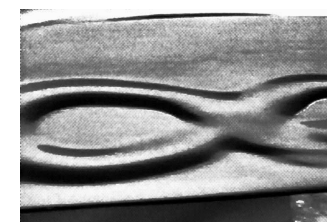


FIGURE 11.24 – Effet d'un point froid se déplaçant sous une couche mince de liquide.

11.7 Les tensioactifs

11.7.1 Pourquoi met-on du savon pour se laver les mains ?

Le savon est un tensioactif, c'est-à-dire un corps qui agit sur la tension de surface. Le plus souvent il s'agit de molécules amphiphiles, c'est-à-dire des molécules dont une extrémité préfère être entourée de molécules d'eau et l'autre refuse au contraire ce contact. Ces molécules se mettent alors plutôt aux interfaces et elles sont donc très efficaces, même en faible quantité, pour diminuer la tension de surface (figure 11.25). C'est cette propriété qui rend l'eau savonneuse plus « mouillante » (l'angle θ est plus faible) et donc plus efficace pour détacher et dégraisser.

Plus on met de tensioactif plus la tension de surface diminue, jusqu'à un certain point appelé la concentration micellaire critique (c.m.c.) où toute la surface étant couverte de molécules amphiphiles, les molécules suivantes se regroupent à l'intérieur du liquide sous forme de globules appelés *micelles*. A partir de la c.m.c., la tension de surface ne décroît plus et les molécules rajoutées augmentent seulement le nombre de micelles (figure 11.26).

11.7.2 Pourquoi peut-on faire des membranes de savon et pas des membranes d'eau ?

Une membrane de savon est en réalité une membrane d'eau avec des molécules de tensioactif sur les deux surfaces. La tension interfaciale de cette membrane est donc une fonction décroissante de la

concentration en savon. Si une membrane de savon est brusquement déformée et étirée localement, la concentration de savon dans la partie étirée est plus faible, la tension de surface locale y devient plus élevée qu'ailleurs et il apparaît donc une force de rappel qui tend à lutter contre la déformation initiale. Cet effet élastique, qui n'existe pas pour une membrane d'eau pure, explique la relative longévité des bulles de savon.

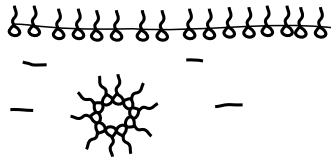


FIGURE 11.25 – Localisation des molécules amphiphiles à la surface de l'eau ou dans des micelles.

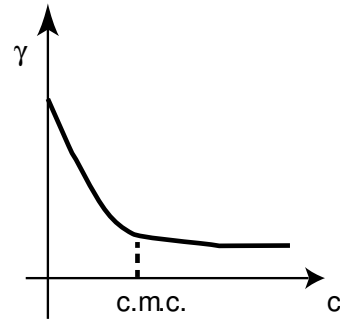


FIGURE 11.26 – Allure de l'évolution de la tension de surface de l'eau en fonction de la concentration c en tensioactif.

Pour en savoir plus :

Gouttes, bulles, perles et ondes, P.-G. de Gennes, F. Brochard-Wyart, D. Quéré, Belin (2006). Réf. [10].

1805-2005 deux siècles de découvertes sur la capillarité, Y. Pomeau, séminaire disponible en vidéo téléchargeable sur <http://www.diffusion.ens.fr/index.php?res=conf&idconf=821>.

Chapitre 12

La portance sur une aile

Sommaire

12.0.3 Etude du décolage	118
12.0.4 Utilisation de la polaire Eiffel	120
12.0.5 Cas d'un voilier	120
12.1 Nage et vol animal	124
12.1.1 Les oiseaux	124
12.1.2 Les poissons	124

Pour tout objet dans un écoulement uniforme, on définit la **force de traînée** $\vec{D}$ (drag en anglais) comme la force dans l'axe de l'écoulement, et la **portance** $\vec{L}$ (lift en anglais) comme la force perpendiculaire à cet axe. On définit aussi des coefficients adimensionnés de traînée et de portance par :

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 A} \quad (12.1)$$

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 A} \quad (12.2)$$

où D et L représentent respectivement l'intensité des forces de traînée et de portance et A est une surface représentant l'obstacle. Pour une aile c'est souvent la surface de l'aile.

Une aile en incidence dans un écoulement (figure 12) présentera de la portance uniquement s'il existe une circulation Γ non nulle autour d'elle. Mais sa portance sera maximum pour un angle d'incidence donné que si l'aile n'a pas décroché, c'est-à-dire si l'écoulement est laminaire sur le bord de fuite, c'est ce que l'on appelle la condition de Kutta (figure 12c). La circulation prend alors une valeur particulière Γ_{Kutta} .

La figure 12 montre que pour avoir une portance il faut que la vitesse de l'écoulement soit plus faible sous l'aile (coté appelé l'**intrados**) qu'au-dessus de l'aile (coté **extrados**). En conséquence, en supposant le fluide parfait, le théorème de Bernoulli nous dit que la pression sera plus forte sous l'aile et plus faible au-dessus de l'aile comme le montre la figure 12.

Attention, on trouve parfois dans la littérature un argument faux : « comme le fluide qui passe de chaque coté de l'aile doit arriver en même temps au bord de fuite, le fluide sur l'extrados doit aller plus vite que sur l'intrados ». Il n'y a aucune raison pour que le fluide mette le même temps pour parcourir chaque coté de l'aile et d'ailleurs il ne le fait pas comme le montre la figure 12.3.

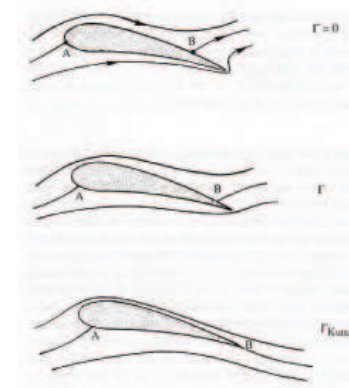


FIGURE 12.1 – Circulation Γ et condition de Kutta au bord de fuite d'une aile. D'après [20] p. 553.

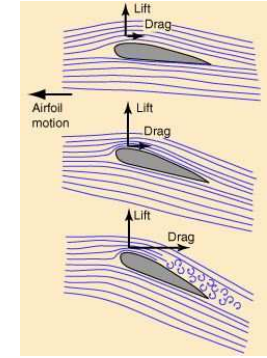


FIGURE 12.2 – Écoulement à différentes incidences. Si l'incidence est trop grande (de l'ordre de 15°) l'aile décroche

Un calcul complet montre que pour un fluide parfait la portance $\vec{L}$ par unité de longueur pour un écoulement supposé bidimensionnel est donné par la relation :

$$\vec{L} = \rho \vec{U}_\infty \wedge \vec{\Gamma},$$

où $\vec{\Gamma}$ est un vecteur dirigé dans le plan perpendiculaire à l'écoulement et d'intensité égale à la circulation Γ (voir paragraphe ?? :CirculationComplexe :CirculationComplexe=page suivante). Une démonstration simplifiée a déjà été présentée au paragraphe 6.3.5. Notons que pour un fluide parfait la traînée est exactement nulle (c'est le paradoxe de d'Alembert). Ce n'est qu'à cause de l'existence de couches limites visqueuses que des forces de cisaillement s'exercent sur la surface de l'aile (traînée visqueuse) et que l'intégrale des forces de pression a une composante dans la direction de l'écoulement (traînée de forme et traînée induite). Toutefois la traînée est heureusement pour nos avions d'un ordre de grandeur plus faible que la portance.

Pour un écoulement à haut nombre de Reynolds, les couches limites sont minces, et les gradients de pression transverses à ces couches limites sont faibles. En conséquence le résultat pour la portance issu de l'hypothèse de fluide parfait reste correct au premier ordre pour des fluides réels.

Voici à titre de comparaison l'écoulement autour d'un cylindre en rotation dans un fluide parfait (figure 12.6).

12.0.3 Etude du décolage

Un avion en vol horizontal à son poids équilibré par la portance. Cette portance suppose qu'il existe une certaine circulation autour de ses ailes. Mais la persistance de l'irrotationalité impose que cet avion en décollant laisse sur la piste un tourbillon de circulation contraire à celle localisée autour des ailes. Cette propriété est illustrée par la figure 12.7. On peut d'ailleurs en faire l'expérience avec un cuillère mise en mouvement rapidement dans un bol de café ou de chocolat.

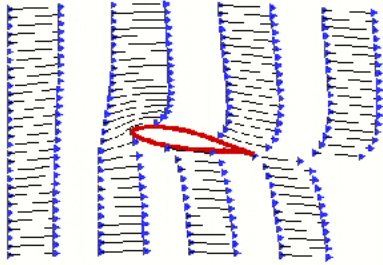


FIGURE 12.3 – Simulation d'écoulement autour d'une aile, montrant que le fluide va plus vite au-dessus de l'aile et que les 2 veines de fluides n'arrivent pas en même temps au bord de fuite.

- **Tourbillons de bout d'aile.** Comme nous avons vu qu'un tube de vorticité ne peut s'arrêter au milieu de nulle part si le fluide est parfait, le vortex laissé sur la piste de décollage est en fait relié à la circulation existant autour des ailes par deux *vortex de bout d'aile* qui sont visibles sur la figure 12.8. Ces deux vortex contrarotatifs sont la signature d'un fort écoulement descendant derrière l'avion. Cet écoulement — appelé downwash en anglais — est une conséquence du principe d'action et réaction. Si l'air exerce une force vers le haut sur l'avion, la portance, l'avion exerce sur l'air une force vers le bas. C'est pourquoi il est dangereux pour un petit avion de croiser le sillage d'un gros porteur, et c'est aussi pourquoi les oiseaux migrateurs préfèrent voler en "V" afin de profiter du courant ascendant généré par un des vortex de bout d'aile de l'oiseau qui le précède !

- En vol horizontal, sur un avion de ligne la portance crée par le choix d'un angle d'incidence des ailes et de la vitesse de croisière équilibre le poids. Les moteurs de l'avion dissipent alors une puissance égale au produit de la force de traînée par la vitesse de translation de l'avion.

- Un planeur par contre, sans courant d'air ascendant, ne peut pas voler en vol horizontal. Il doit perdre de l'altitude pour avoir de la vitesse et donc de la portance. Son angle de descente est donné par $\tan \alpha = D/L$. Son angle minimum de descente correspond au maximum du rapport portance sur traînée. On appelle **finesse** le maximum de ce rapport : $f = L/D$. Le tableau suivant donne quelques valeurs typiques de finesse.

	finesse
Moineau	4
parapente	8
deltaplane	12
aigle	12
Boeing 747	15
Albatros	20
Planeur	< 60

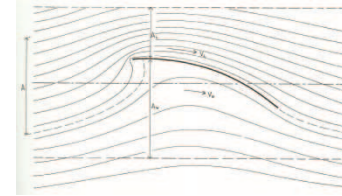


FIGURE 12.4 – Ecoulement autour d'un profil mince. D'après [19] p. 43.

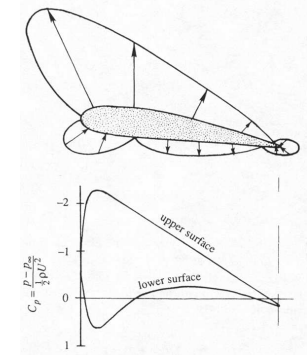


FIGURE 12.5 – Distribution de pression autour d'une aile. D'après [20] p. 552.

12.0.4 Utilisation de la polaire Eiffel

Pour améliorer les profils d'aile il est important de connaître la portance et la traînée pour tout les angles d'incidence, et aussi pour différents nombres de Reynolds (figure 12.9). Pour une plaque plane sous faible incidence (inférieure à 15 ) on montre que $C_L = 2\pi \sin \alpha$ et que $C_D \approx 0$ (théorie de Kutta-Joukowski).

La polaire Eiffel est la courbe $L = f(D)$ où chaque point correspond à un angle d'incidence. Cette courbe permet de trouver facilement la finesse de l'aile.

12.0.5 Cas d'un voilier

Un voilier utilise aussi des forces de portance pour avancer avec ou contre le vent. Pour lui la portance ne sert pas à équilibrer le poids (la poussée d'Archimède s'en charge). Par contre il a deux sortes d'ailes : ses voiles et sa quille. Les premières subissent l'écoulement du vent apparent (vent relatif mesuré dans le référentiel du bateau) avec son intensité et sa direction. Sa quille ou sa dérive subit elle l'écoulement de l'eau lié à la vitesse du bateau et à son angle de dérive. L'équilibre des forces de portance et de traînée, mais aussi des couples de retournement appliqués par ces forces, font tout le plaisir et la subtilité de la voile ! Par exemple les bateaux modernes peuvent aller plus vite que le vent réel (mesuré par un bateau immobile) et ce dans toutes les directions !

Les figures suivantes illustrent deux cas classiques : la remontée au près (figure 12.10) et la descente au portant (figure 12.11).

Notons que pour un voilier, en plus de la traînée de friction visqueuse (lié à la surface mouillée), de la traînée de pression (lié à la forme de la coque), de la traînée induite (lié à l'angle de dérive de la coque) il faut ajouter la traînée de vague ( nergie consommée dans la génération des vagues).

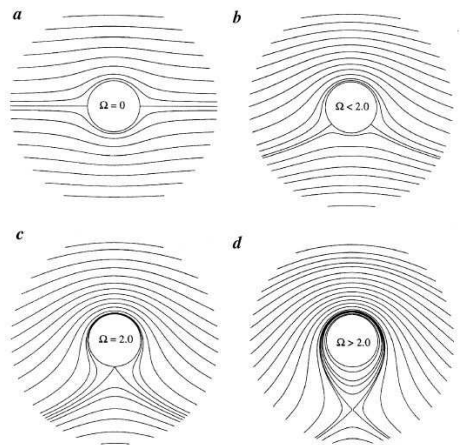


FIGURE 12.6 – Écoulement irrotationnel d'un fluide parfait autour d'un cylindre en rotation une vitesse angulaire (a) nulle, (b) souscritique, (c) critique et (d) supercritique.



FIGURE 12.7 – Apparition de la portance par émission de vortex : (a) démarrage de l'aile et émission d'un tourbillon positif au niveau du bord de chute créant une circulation négative sur l'aile, (b) arrêt de l'aile qui relâche un tourbillon négatif, (c) deux tourbillons de sens contraires sont formés par le démarrage et l'arrêt de l'aile.



FIGURE 12.8 – Visualisation des vortex de bout d'aile

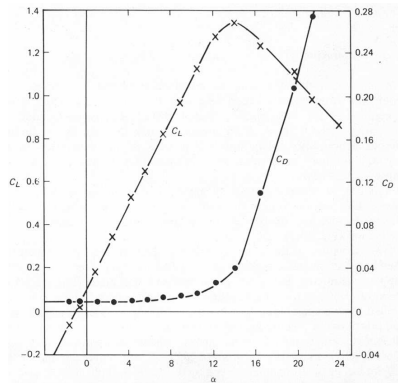


FIGURE 12.9 – Variation de la portance et de la traînée d'une aile en fonction de l'incidence. D'après [28] p. 154.

12.1 Nage et vol animal

De très nombreux animaux se déplacent à hauts nombres de Reynolds. Ils utilisent donc des forces de portance, soit sur des ailes, soit sur des nageoires.

12.1.1 Les oiseaux

Une analyse dimensionnelle pour les oiseaux, supposés à peu près homothétiques, montre que leur poids croît comme leur taille au cube ($\sim l^3$), la surface de leurs ailes comme l^2 . Comme la portance est proportionnelle à leur vitesse de vol au carré (U^2 car $C_D \approx C_{ste}$), on en déduit que le poids doit varier comme le cube de la vitesse de vol. C'est ce que montre la figure 12.12.

Une bonne référence sur les différents mécanismes du vol : vol plané, vol battu, vol stationnaire, accompagné de très belles photos, [7].

12.1.2 Les poissons

Les poissons se déplacent en propulsant de l'eau vers l'arrière grâce à leurs nageoires latérales et caudale (figure 12.13). Comme les voiliers ils n'ont pas à lutter contre la gravité. Par contre les mouvements des nageoires sont instationnaires ce qui rend plus délicat leur étude, on ne sait pas encore très bien estimer les rendements de leurs mouvements. Un thon par exemple a un mouvement alterné de sa nageoire caudale qui émet des tourbillons de sens contraires correspondant à une **allée de von Kármán**. Toutefois ces tourbillons ont un sens opposé à celui qu'ils auraient si le poisson, immobile ou mort, était tiré dans de l'eau au repos. En propulsion normale, un jet d'eau est dirigé vers l'arrière, ce qui par conservation de la quantité de mouvement totale, pousse le poisson vers l'avant. On pourra par exemple consulter le site du MIT (<http://web.mit.edu/towtank/www/Tuna/tuna.html>) où une équipe a réalisé un robot en forme de thon.

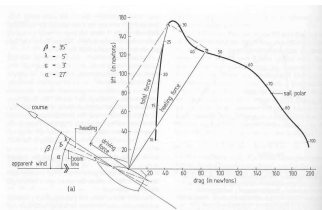


FIGURE 12.10 – Portance sur une grand-voile au près. D'après [19] p. 62.

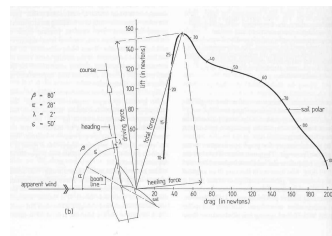


FIGURE 12.11 – Portance sur une grand-voile au large. D'après [19] p. 62.

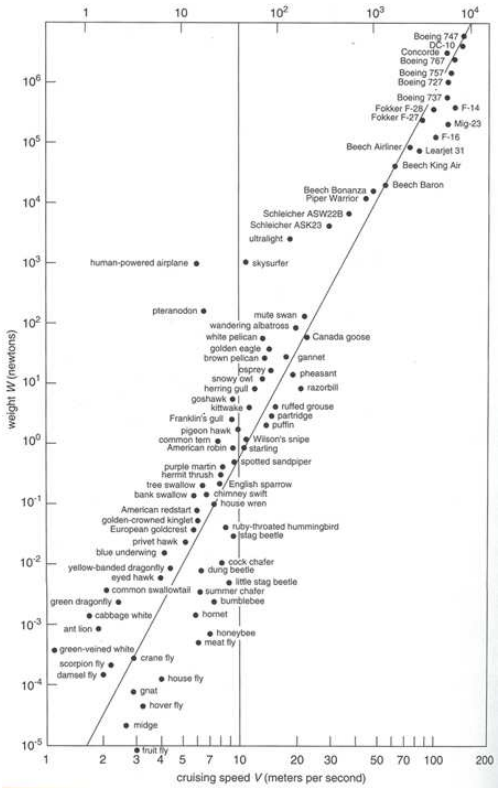


FIGURE 12.12 – Loi d'échelle entre le poids et la vitesse de vol des animaux et objets volants. D'après [26] p. 12.

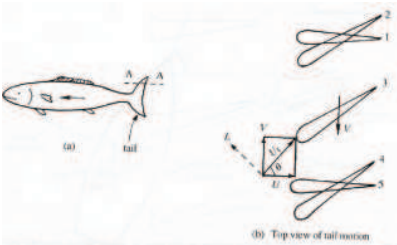


FIGURE 12.13 – Etude de la portance sur une nageoire de poisson. D'après [20] p. 573.

Chapitre 13

Quelques personnages marquants de la Mécanique des Fluides

Inspiré du site : <http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/BiogIndex.html>

- **ARCHIMÈDE** (- 287, -212) : Né à Syracuse (Sicile), il est célèbre pour son théorème sur les corps immergés, "Principe d'Archimède".
- **BATCHELOR** George Keith. (1920-2000) : Professeur de Mécanique des Fluides à Cambridge (UK). De nombreuses contributions en particulier sur l'étude des écoulements de suspension de particules et dans le domaine de la turbulence.
- **BÉNARD** Henri (1874-1938) : Physicien français ayant étudié expérimentalement les tourbillons derrière un cylindre en mouvement ainsi que la convection thermique.
- **BERNOULLI** Daniel (1700-1782) d'origine suisse était à la fois un mathématicien, un hydrodynamicien et un physicien. C'était le plus jeune de quatre frères mathématiciens. Son Hydrodynamica (1738) présente son équation, mais ne la démontre pas vraiment à partir des premiers principes. La démonstration est due à Euler.
- **BLASIUS** Heinrich (1883-1970) : Physicien allemand connu pour ses travaux sur la couche limite.
- **BOLTZMANN** Ludwig (1844-1906) : Physicien autrichien. Principal créateur de la théorie cinétique des gaz qu'il élargit ensuite en une mécanique statistique.
- **BOND** : Le nombre de Bond compare les effets de gravité aux effets de la tension superficielle.
- **BOUSSINESQ** Joseph (1842-1929) : Physicien français, hydrodynamicien connu maintenant pour "l'approximation de BOUSSINESQ".
- **BUCKINGHAM** Edgar (1867-1940) : Physicien américain ayant permis le développement de l'analyse dimensionnelle.
- **COANDA** Henri (1886-1972) : XXXX Effet "Coanda".
- **COUETTE** Maurice (1858-1943) : Il a inventé un viscosimètre qui mesure les forces de cisaillement à la paroi.
- **D'ALEMBERT** Jean le Rond (1717-1783) : Un des fondateurs de l'hydrodynamique, en particulier par son "Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides". On parle encore souvent du Paradoxe de d'ALEMBERT.
- **DARCY** Henry Philibert Gaspard (1803-1858) a effectué de nombreuses études sur les pertes de charge pour des écoulements d'eau en conduite. Julius WEISBACH (1806-1871) a proposé la forme de l'équation de DARCY dans son traité de mécanique des fluides pour ingénieur.

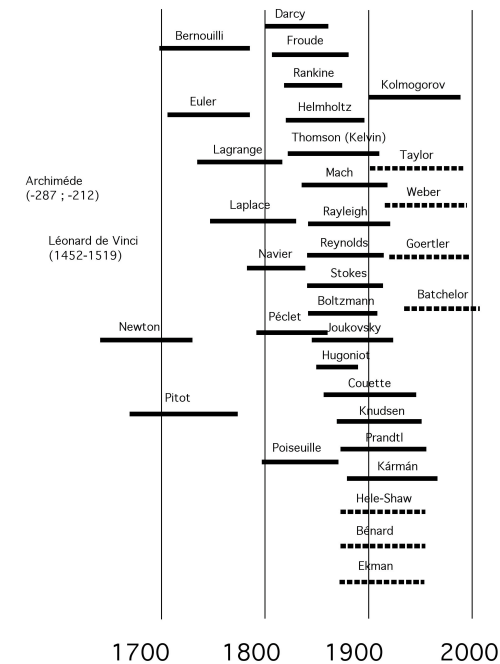


FIGURE 13.1 – Tableau chronologique de quelques figures marquantes pour la Mécanique des Fluides

- **DE VINCI** Leonard (1452-1519) : Il s'est en particulier intéressé à décrire les écoulements turbulents.
- **DEAN** W. R. : 1928. Il a étudié les écoulements entre parois courbes. On parle d'instabilité de DEAN et de nombre de DEAN.
- **EKMAN** Vagn Walfrid (1874-1954) : Météorologiste et océanographe suédois qui a décrit en particulier la direction du vent ou du courant en fonction de la distance à la surface de l'océan (spirale d'EKMAN).
- **EULER** Leonhard (1707-1783) Un des mathématiciens les plus productifs de son temps, en particulier en mécanique, dynamique et hydrodynamique. Il a démontré que l'équation de BERNOULLI est une forme intégrale de l'équation d'EULER.
- **FROUDE** William (1810-1879) : ingénieur britannique. Créateur du premier bassin pour essais de modèle et inventeur d'un frein hydraulique.
- **GÖERTLER** Henry (1909-1987) : On lui doit l'étude des couches limites sur des parois concaves (instabilité de GÖERTLER et nombre de GÖERTLER).

- **HAGEN** Gotthilf (1797-1884) Ingénieur allemand, a étudié les écoulements en conduite à peu près en même temps que POISEUILLE (on parle parfois de profil d'HAGEN-POISEUILLE).
- **HELE-SHAW** Henry Selby (1854-1941) : Ingénieur et professeur de Mécanique des Fluides à Bristol et à Liverpool. Il a inventé la cellule de HELE-SHAW qui permet la visualisation entre deux plaques de l'écoulement potentiel autour d'obstacles.
- **HELMHOLTZ** Hermann von (1821-1894) : Physicien et physiologiste allemand. Il a introduit la notion d'énergie potentielle et énoncé le principe de conservation de l'énergie. A découvert le rôle des harmoniques dans le timbre des sons et mesuré la vitesse de l'influx nerveux.
- **HUGONOT** Henri (1851-1887) : Physicien français. L'équation de HUGONOT intervient dans les fluides compressibles.
- **JOUKOVSKY** Nicolaï (1847-1921). Professeur de Mécanique à l'université de Moscou. Il a publié de 1862 à 1890 des quantités de travaux sur divers problèmes de mécanique et d'astronomie et doit sa célébrité à sa découverte "sur les profils d'ailes" qui a joué un rôle immense dans l'aviation
- **KÁRMÁN**, Theodore von (1881-1963) : Ingénieur américain né en Hongrie. Il a résolu de nombreux problèmes d'hydrodynamique et d'aérodynamique. La première soufflerie supersonique des USA fut construite à son initiative.
- **KELVIN** Lord : Voir à Thomson.
- **KNUDSEN** Martin (1871-1949) : Physicien danois qui a établi les lois cinétiques des gaz raréfiés.
- **KOLMOGOROV** Andreï N. (1903-1987) : Mathématicien russe qui établit les bases axiomatiques du calcul des probabilités. On lui doit des modèles de la turbulence.
- **KUTTA** Wilhelm Martin (1867-1944) : <http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Kutta.html>.
- **LAMB** Horace (1849-1934) : Mathématicien anglais, professeur à Adelaïde puis à l'Université de Manchester. Il a écrit en particulier un livre un peu daté maintenant mais qui couvre un large champ de la mécanique des fluides. <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Lamb.html>
- **LAGRANGE** Joseph Louis (1736-1813) : Mathématicien français. A développé le calcul différentiel et intégral.
- **LANDAU** Lev Davidovitch (1908-1968) : Physicien théoricien soviétique, prix Nobel 1962. C'est intéressé à la turbulence et aux instabilités. Célèbre aussi avec LIFCHITZ pour leur cours de Physique en 5 volumes.
- **LAPLACE** Pierre Simon de (1749-1827) : Astronome, mathématicien et physicien, généralise le théorème des quantités de mouvement, la loi des aires et le principe de la moindre action, ouvre à la mécanique des espaces distincts de ceux des mathématiques.
- **LORENZ** Edward V. (1917-) : Météorologue, professeur au MIT connu pour son "attracteur de LORENZ" et pour ses études sur la théorie du chaos et les systèmes dynamiques (effet papillon) dans les années 60.
- **MACH** Ernst (1838-1916) : physicien autrichien qui mit en évidence le rôle de la vitesse du son en aérodynamique. C'était aussi un philosophe et un psychologue.
- **MAGNUS** Heinrich Gustav (1802-1870) : Physicien allemand connu pour l'étude de la portance créée sur un cylindre en rotation, "l'effet MAGNUS".
- **MARANGONI** Carlo (1840-1925) : Il a étudié la convection avec surface libre et donc l'effet de la variation de la tension interfaciale avec la température.
- **NAVIER** Claude-Louis-Marie-Henri (1785-1836) a contribué à la mécanique du solide et des fluides. H. NAVIER a établi une théorie générale de l'élasticité et a étudié l'écoulement des

- liquides dans les tuyaux. Les équations fondamentales de la mécanique des fluides portent son nom. Bien qu'il ait formulé pour la première fois l'équation de NAVIER-STOKES, il n'avait pas développé le concept de cisaillement.
- **NEWTON** Isaac (1642-1727). Dans son "Principia", il a étudié la propagation des ondes acoustiques et la théorie cinétique des gaz. Ses lois du mouvement sont bien sur à la base de la mécanique des fluides.
- **OSEEN** Carl W. (1879-1944). Théoricien suédois.
- **PASCAL** Blaise (1623-1662) : Philosophe français.
- **PÉCLET** Jean Claude (1793-1857) : physicien français.
- **PITOT** Henri (1695-1771) : Ingénieur et physicien français. On lui doit de nombreux ouvrages d'art ainsi que le tube de PITOT pour mesurer la vitesse d'un écoulement.
- **PLATEAU** Joseph (1801-1883) : Physicien belge qui s'intéressa aux surfaces d'aire minimale, aux effets de ménisque (bordures de PLATEAU) et aux instabilités induites par la tension de surface (instabilité de RAYLEIGH-PLATEAU). C'est aussi un des précurseurs du dessin animé !
- **POINCARRÉ** Raymond (1854-1912) : Mathématicien français, père de la théorie des systèmes dynamiques.
- **POISEUILLE**, Jean Louis (1799-1869) était un médecin et physicien français qui a étudié l'écoulement du sang dans les capillaires.
- **PRANDTL** Ludwig (1875-1953) a développé ses idées physiques dans un bref mais remarquable article publié en 1905. Il a grandement influencé le développement de la mécanique des fluides de ce siècle en particulier en développant la théorie hydrodynamique de l'aile portante.
- **RANKINE** William (1820-1872) : physicien écossais. Il a créé l'énergétique en distinguant les énergies mécaniques, potentielles et cinétiques.
- **RAYLEIGH** Lord, John Strutt (1842-1919) : physicien anglais qui découvrit l'Argon, étudia la diffusion de la lumière et donna une valeur du nombre d'Avogadro. Prix Nobel de physique en 1904.
- **REYNOLDS** Osborne (1842-1912) : Ingénieur et physicien britannique (Université de Manchester), spécialiste de la mécanique des fluides et pionnier de l'étude des écoulements turbulents.
- **STROUHAL** Vincez (1850-1922) : XX
- **STOKES** George Gabriel (1819-1903) mathématicien et physicien irlandais qui a fait de nombreuses contributions sur les écoulements visqueux, en particulier la formulation complète de l'équation de NAVIER-STOKES et les écoulements à faible vitesse (écoulement de STOKES). Spécialiste en optique aussi (fluorescence et rayons X).
- **TORRICELLI** Evangelista (1608-1647) Physicien et mathématicien italien, inventeur du baromètre. TORRICELLI assure les fonctions de secrétaire et d'assistant auprès de GALILÉE. Il remplit de mercure un tube de verre long de 1,30 m et renverse celui-ci dans un récipient. Il observe alors qu'une partie du mercure demeure dans le tube et qu'un vide se forme à sa partie supérieure. Le premier, Torricelli réalise ainsi un vide permanent. Il conclut, après de longues observations, que les variations de hauteur du mercure, d'un jour à l'autre, sont dues à des changements de la pression atmosphérique. Il ne publiera cependant jamais ces résultats, trop occupé par ses études de mathématique pure, en particulier par des calculs sur la cycloïde.
- **TAYLOR** Geoffrey Ingram (1886-1975) : Professeur de Mécanique des Fluides à Cambridge. Il a, parmi de très nombreux autres travaux, étudié plusieurs instabilités hydrodynamiques.
- **THOMSON** William [Lord Kelvin] (1824-1907) plus connu pour son invention de l'échelle de température absolu. Il a été diplômé de l'Université de Glasgow à l'âge de 10 ans ! En mécanique des fluides, il a développé la théorie des ondes sonores, mouvement des tourbillons, ondes capillaires et la stabilité des écoulements visqueux. Il a introduit le mot de turbulence pour

caractériser les écoulements instationnaires et aléatoires. A étudié plusieurs exemples d'instabilités hydrodynamiques.

- **VENTURI** Giovanni Battista (1746-1822) : Physicien italien ayant étudié l'effet VENTURI, c'est-à-dire la diminution de pression dans des conduites de section variable.
- **WEBER** Moritz (1871-1951) : Un des quatre scientifiques allemands ayant travaillé en mécanique des fluides et sur les émissions de gouttes. On doit à celui-ci l'introduction du "nombre de WEBER".

Films conseillés :

Toute une série de films du « National Committee for Fluid Mechanics Films »(NCFMF), anciens mais excellents en moyenne, sont maintenant disponibles en ligne sur le site du MIT <http://web.mit.edu/fluids/www/Shapiro/ncfmf.html>.

Lectures conseillées

En français :

- [14] D. Salin et J. Martin, *La mécanique des Fluides*, Nathan Université. Un livre simple et bref d'introduction à la mécanique des fluides.
- [16] E. Guyon, J.-P. Hulin et L. Petit, *Ce que disent les fluides*, Belin, Pour La Science, 2005. Un livre où, sous le principe de double pages Photo + Textes, sont illustrés des aspects de la mécanique des fluides que l'on peut rencontrer dans la vie courante.
- [15] E. Guyon, J.-P. Hulin et L. Petit, *Hydrodynamique Physique*, EDP Sciences, 2001. Un référence en français avec une approche de physicien sur la mécanique des fluides.
- [4] S. Candel, *Mécanique des fluides*, Dunod
- [13] L. Landau et E. Lifchitz, *Mécanique des fluides*, Editions de Moscou
- [30] W. Wick, *Gouttes d'eau*, Editions Millepages. Livre de photographies.
- [21] M. Lesieur, *La turbulence*, Presses Universitaires de Grenoble.
- [10] P.-G. de Gennes, F. Brochard-Wyart, D. Quéré, *Gouttes, bulles, perles et ondes*, Belin, 2006.
- [22] P. Manneville, *Instabilités, Chaos et Turbulence*, Editions de l'Ecole Polytechnique, 2004.

En anglais :

- [28] D.J. Tritton, *Physical fluid dynamics*, Oxford Science Publication, 1988.
- [20] P.K. Kundu, *Fluid Mechanics*, Academic Press, 1990.
- [12] Van Dyke, *An Album of Fluid Motion*, Parabolic Press, 1982.
- [1] D.J. Acheson, *Elementary Fluid Dynamics*, Oxford, 1990.
- [18] U. Frisch, *Turbulence*, Cambridge Univ. Press, 1995.
- [23] Th. A. McMahon and J.T. Bonner, *On Size and Life*, Scientific American Library, 1983.
- [11] P.G. Drazin, *Introduction to Hydrodynamic Stability*, Cambridge Univ. Press, 2002.
- [5] B. Castaing, *An introduction to hydrodynamics*, Hydrodynamics and Nonlinear Instabilities, Cambridge University Press, pages 25 à 79 (1998).
- [9] P.A. Davidson, *Turbulence An Introduction for Scientists and Engineers*, Oxford University, 2004.
- [8] O. Darrigol, *Worlds of Flow : A Hystory of Hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl*, Oxford University, 2005.

CD conseillés :

- [17] G. Homsy *et al.*, *Muti-Media Fluid Mechanics*, CD-Rom Cambridge University Press, 2002.
CD (images et films) sur les phénomènes interfaciaux dans le livre [10].

Bibliographie

- [1] D.J. Acheson. *Elementary Fluid Dynamics*. Oxford, 1990.
- [2] D. F. Young B. R. Munson and T. H. Okiishi. *Fundamentals of Fluid Mechanics*. Wiley, NY, 1990.
- [3] G. K. Batchelor. *Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 2000.
- [4] S. Candel. *Mécanique des fluides*. Dunod, 1995.
- [5] B. Castaing. *An introduction to hydrodynamics*, pages 25–79. Cambridge University Press, 1998.
- [6] Comolet. *Mécanique expérimentale des fluides, tomes 1, 2 et 3*. Editions Masson, 1979.
- [7] S. Dalton. *The Miracle of flight*. New York : Mc Graw-Hill, 1977.
- [8] Olivier Darrigol. *Worlds of Flow : A History of Hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl*. Oxford University, 2005.
- [9] P.A. Davidson. *Turbulence An Introduction for Scientists and Engineers*. Oxford University, 2004.
- [10] P.-G. de Gennes F. Brochard-Wyart et D. Quéré. *Gouttes, bulles, perles et ondes*. Belin, 2002.
- [11] P. G. Drazin. *Introduction to Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press, 2002.
- [12] M. Van Dyke. *An Album of Fluid Motion*. Parabolic Press, 1982.
- [13] L. Landau et E. Lifchitz. *Elasticité*. Editions de Moscou, 1989.
- [14] D. Salin et J. Martin. *La mécanique des Fluides*. Nathan Université, 1997.
- [15] E. Guyon J.-P. Hulin et L. Petit. *Hydrodynamique Physique*. EDP Sciences, 2001.
- [16] E. Guyon J.-P. Hulin et L. Petit. *Ce que disent les fluides*. Belin, Pour la science, 2005.
- [17] G. Homsy *et al.* *Multi-Media Fluid Mechanics, second edition*. DVD-Rom Cambridge University Press, 2008.
- [18] U. Frisch. *Turbulence*. Cambridge University Press, 1995.
- [19] R. Garrett. *Symmetry of sailing : The physics of sailing for yachtsmen*. Sheridan House, 1987.
- [20] P. K. Kundu. *Fluid Mechanics*. Academic Press, 1990.
- [21] M. Lesieur. *La turbulence*. Presses Universitaires de Grenoble, 1994.
- [22] Paul Manneville. *Instabilités, Chaos et Turbulence*. Les éditions de l'Ecole polytechnique, 2004.
- [23] Th. A. McMahon and J. T. Bonner. *On Size and Life*. Scientific American Library, 1983.
- [24] E.M. Purcell. Life at low reynolds numbers. *Am. J. Phys.*, 45 :3–11, 1977.
- [25] I. Stewart. *20 000 lieues... penchés sous les mers*, pages 120–125. Bibliothèque pour la Science, 1999.

- [26] H. Tennekes. *The simple science of flight. From insects to jumbo jets*. The MIT Press, 1997.
- [27] D'Arcy Thompson. *Forme de croissance*. Edition du Seuil, 1994.
- [28] D. J. Tritton. *Physical fluid dynamics*. (second edition), Oxford University Press, 1988.
- [29] Luc Valentin. *L'Univers Mécanique*. Editions Hermann, 1997.
- [30] W. Wick. *Gouttes d'eau*. Editions Millepages, 1999.