

Table des matières

Partie 1.	L'alphabet grec	3
Calculs		4
Partie 2.	Calculs algébriques.....	4
Partie 3.	Résoudre une équation ou une inéquation du premier degré	6
Partie 4.	Systèmes de deux équations a deux inconnues $ax + by = ca'x + b'y = c'$	7
Les fonctions		10
Partie 5.	Fonctions affines et équations de droite	10
Partie 6.	Les fonctions du second degré.....	12
Partie 7.	La fonction exponentielle - Exp	14
Partie 8.	La fonction logarithme népérien - Ln.....	15
Partie 9.	Ensemble de définition des fonctions	16
Partie 10.	La dérivation et ses applications	17
L'intégration et les équations différentielles		19
Partie 11.	L'intégration	19
Partie 12.	Les équations différentielles	21
Les fonctions à plusieurs variables		22
Partie 13.	Les dérivées partielles.....	22
Partie 14.	Recherche d'extremum :.....	22
Partie 15.	Intégration en dimension 2.....	23
Partie 16.	Différentielle et primitive.....	25
Algèbre et géométrie		27
Partie 17.	Les conversions d'unités	27
Partie 18.	Surfaces et volumes	29
Partie 19.	Trigonométrie	30
Partie 20.	Rappels de géométrie plane	32
Partie 21.	Géométrie analytique en dimension 2	34
Partie 22.	Les complexes	36

Partie 1 : L'alphabet grec

Nom des lettres	Lettre minuscule	Lettre majuscule
Alpha	α	
Bêta	β	
Gamma	γ	Γ
Delta	δ	Δ
Epsilon	ε	
Dzêta	ζ	
Êta	η	
Thêta	θ	
Lambda	λ	
Mu	μ	
Nu	ν	
Xi	ξ	
Omicron	\omicron	
Pi	π	Π
Rhô	ρ	
Sigma	σ	Σ
Tau	τ	
Phi	φ	Φ
Psi	ψ	Ψ
Oméga	ω	Ω

Calculs

Partie 2 : Calculs algébriques

1/ Savoir arrondir

Si le chiffre qui suit le dernier chiffre qu'on garde est strictement inférieur à 5, on arrondi à l'inférieur.
Si ce chiffre est supérieur ou égal à 5, on arrondi au supérieur.

Exemple :

Arrondir $A = 24,68$ au dixième. $8 \geq 5$ Donc $A \approx 24,7$

Arrondir $A = 24,63$ au dixième. $3 < 5$ Donc $A \approx 24,6$

Arrondir $A = 24,65$ au dixième. $5 \geq 5$ Donc $A \approx 24,7$

2/ Identités remarquables :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

3/ Règles de calculs

Règle 1 : Dans une chaîne de calcul sans parenthèses, on effectue d'abord les multiplications et les divisions avant les additions et les soustractions.

Exemples 1 : $A = 7,1 + 4 \times 5 = 7,1 + 20 = 17,4$

$$B = 3 - 12 / 3 = 3 - 4 = -1$$

Règle 2 : Dans un calcul avec des parenthèses, on effectue d'abord les calculs entre les parenthèses, en commençant par les parenthèses les plus intérieures.

Exemples 2 : $A = 3 - (4,5 \times 2) = 3 - 9 = -6$

$$B = 3 + 5 \times (6 / (-5 + 3)) = 3 + 5 \times (6 / (-2)) = 3 + 5 \times (-3) = 3 + (-15) = -12$$

Règle 3 : Dans une chaîne de calcul qui contient parenthèse, puissance, et racine carrée, on traite toujours les valeurs des parenthèses en premier, puis les puissances et racines carrées, après les multiplications et les divisions et enfin les additions et les soustractions.

Exemples 3 : $A = 3 - (4,5 \times 2)^2 = 3 - 9^2 = 3 - 81 = -78$

$$B = (\sqrt{36} - 2^2)^{-1} - 4 = (6 - 4)^{-1} - 4 = (2)^{-1} - 4 = \frac{1}{2} - 4 = 0,5 - 4 = -3,5$$

4/ Développer :

$$k(a + b) = ka + kb$$

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

5/ Fractions

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}$$

Somme de deux fractions : Avec un même dénominateur : $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$
 Réduction au même dénominateur : $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d + c \times b}{b \times d}$

Produit de deux fractions : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$

Quotient de deux fractions : Diviser, c'est multiplier par l'inverse : $\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}} = \frac{a}{c} \times \frac{d}{b} = \frac{a \times d}{c \times b}$

6/ Racine carrées

Soit $x \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt{x} \geq 0$ $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Attention : $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

La quantité conjuguée de $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est $\sqrt{a} - \sqrt{b}$: $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$

Pour enlever la racine au dénominateur : Multiplier au numérateur et au dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur.

Premier exemple : $A = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{6 \times \sqrt{3}}{3} = \frac{3 \times 2 \times \sqrt{3}}{3} = \boxed{2\sqrt{3}}$

Deuxième exemple : $B = \frac{2}{\sqrt{5}+3} = \frac{2 \times (\sqrt{5}-3)}{(\sqrt{5}+3) \times (\sqrt{5}-3)} = \frac{2 \times (\sqrt{5}-3)}{\sqrt{5}^2 - 3^2} = \frac{2 \times (\sqrt{5}-3)}{5-9} = \frac{2 \times (\sqrt{5}-3)}{-4} = \frac{2 \times (\sqrt{5}-3)}{-2 \times 2} = \frac{(\sqrt{5}-3)}{-2} = \boxed{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$

Troisième exemple : $C = \frac{2}{\sqrt{7}-2} = \frac{2 \times (\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}-2) \times (\sqrt{7}+2)} = \frac{2 \times (\sqrt{7}+2)}{\sqrt{7}^2 - 2^2} = \frac{2 \times (\sqrt{7}+2)}{7-4} = \frac{2 \times (\sqrt{7}+2)}{3} = \boxed{\frac{2(\sqrt{7}+2)}{3}}$

7/ Puissances

Pour tout réel a, tout réel b ≠ 0 et tous entiers n et p :

- $a^0 = 1$
- $\sqrt{a} = a^{1/2}$ ($a \geq 0$)
- $(ab)^n = a^n b^n$; $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- $a^{n \times p} = (a^n)^p$
- $a^n a^p = a^{n+p}$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$
- $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ ($a \geq 0$)

8/ Valeur absolue

Pour tout réel x, $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

Partie 3 : Résoudre une équation ou une inéquation du premier degré

Définitions :

- Une **équation** est composée de deux membres séparés par un signe « = ». (ex : $3x = 5$)
- **Résoudre une équation** : c'est chercher et trouver le nombre inconnu (en général x).
- La **solution de l'équation** est la valeur de l'inconnue pour que l'équation fonctionne.

Méthode et exemple 1 : Résoudre $2x + 5 = 3x - 4$

1^{ère} étape : On regroupe les « x » ensemble et les « sans riens » ensemble.

2^{ème} étape : On calcule

$$2x + 5 = 3x - 4 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 3x = -4 - 5 \quad \Leftrightarrow \quad -x = -9 \quad \Leftrightarrow \quad x = 9$$

$$S = \{9\}$$

Méthode et exemple 2 : Résoudre $2x = 8$

1^{ère} étape : Entre le 2 et le x , il y a une **multiplication**.

2^{ème} étape : On **divise** chaque membre par 2 afin de se débarrasser du « 2 » à gauche de l'équation.

$$2x = 8 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 8 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{8}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = 4$$

$$S = \{4\}$$

Méthode et exemple 3 : Résoudre $\frac{x}{-3} = 5$

1^{ère} étape : Entre le x et le -3, il y a une **division**.

2^{ème} étape : On **multiplie** chaque membre par -3 afin de se débarrasser du « -3 » à gauche de l'équation.

$$\frac{x}{-3} = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5 \times (-3) \quad \Leftrightarrow \quad x = -15$$

$$S = \{-15\}$$

Méthode et exemple 4 : Résoudre $\frac{2}{9}x = -5$

1^{ère} étape : Entre le $\frac{2}{9}$ et le x , il y a une **multiplication**.

2^{ème} étape : On **divise** chaque membre par $\frac{2}{9}$ afin de se débarrasser du « $\frac{2}{9}$ » à gauche de l'équation.

Cela est équivalent à multiplier par l'inverse, c'est-à-dire $\frac{9}{2}$

$$\frac{2}{9}x = -5 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{9} \times x = -5 \quad \Leftrightarrow \quad x = -5 \times \frac{9}{2} = \frac{-5 \times 9}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{45}{2}$$

$$S = \left\{ -\frac{45}{2} \right\}$$

Définitions :

- Une **inéquation** est une inégalité qui contient une inconnue. (ex : $3x < 5$)
- **Résoudre une inéquation** : c'est chercher et trouver toutes les valeurs de x qui vérifient cette inégalité.

Théorème :

On change le signe de l'inéquation quand on multiplie ou divise par un nombre négatif.

Méthode et exemple 6 : Résoudre $2x - 8 < 4x - 3$

1^{ère} étape : On regroupe les x ensemble et les « sans riens » ensemble.

2^{ème} étape : On calcule. -

3^{ème} étape : On change le signe de l'inéquation quand on multiplie ou divise par un nombre négatif.

$$2x - 8 < 4x - 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 4x < -3 - 8 \quad \Leftrightarrow \quad -2x < -11 \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{-11}{-2}$$

$$S = \left] \frac{11}{2} ; +\infty \right[$$

Partie 4 : Systèmes de deux équations à deux inconnues $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

Définition :

On appelle **système linéaire** de deux équations à deux inconnues le système : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

- avec a, b, c, a', b' et c' des réels ;
- avec x et y deux inconnues.

Résoudre le système :

C'est déterminer le ou les couples de solution $(x ; y)$ (s'ils existent) afin que les deux égalités soient vraies simultanément.

Nombre de solutions ; 3 possibilités :

- Soit aucune solution.
- Soit un seul couple $(x ; y)$ de solution.
- Soit une infinité de solutions.

1/ Résoudre graphiquement

Résoudre graphiquement le système :

C'est trouver l'intersection des droites (D) d'équation $ax + by = c$ et (D') d'équation $a'x + b'y = c'$.

3 cas sont possibles :

- (D) et (D') sont sécantes en A : une seule solution possible : $S = \{(x_A ; y_A)\}$
- (D) et (D') sont strictement parallèles : Pas de solutions (pas d'intersection) $S = \emptyset$
- (D) et (D') sont confondues : Tous les points de (D) ou (D') sont solutions $S = \{(x ; y) ; ax + by + c = 0\}$

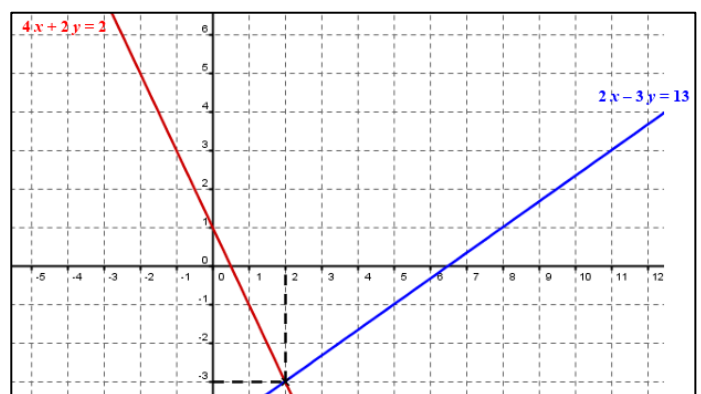
Exemple :

Résoudre graphiquement le système : $\begin{cases} 4x + 2y = 2 \\ 2x - 3y = 13 \end{cases}$

On trace les deux droites d'équations $4x + 2y = 2$ et $2x - 3y = 13$.

Elle sont sécantes en A(2 ; -3).

Donc $S = \{(2 ; -3)\}$



*

Exercice 1 : Résoudre graphiquement sur 3 repères différents les trois systèmes suivants et donner l'ensemble des solutions.

- a. $\begin{cases} 2x - 5y = 2 \\ 3x + 4y = 3 \end{cases}$; b. $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ -3x + 3y - 3 = 0 \end{cases}$; c. $\begin{cases} y = 2x \\ -4y + 8x + 8 = 0 \end{cases}$

2/ Trouver le nombre de solutions

Définition :

On appelle **déterminant** du système d'équation $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ le nombre : $\det = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = a \times b' - a' \times b$

Proposition :

- Le système linéaire $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ admet une **solution unique** si et seulement si $\det = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$.
- Si $\det = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$ le système admet soit une **infinité de solutions**, soit **aucune solution**.

Exemples :

- Quel est le nombre de solutions du système : $\begin{cases} 4x + 2y = 2 \\ 2x - 3y = 13 \end{cases}$

$$\det = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 4 \times (-3) - 2 \times 2 = -12 - 4 = -16 \neq 0$$

Donc il y a une solution unique.

- Quel est le nombre de solutions du système : $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ -3x + 3y - 3 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ -3x + 3y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -1 \\ -3x + 3y = 3 \end{cases}$$

$$\det = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 3 - (-1) \times (-3) = 3 - 3 = 0$$

Donc il y a soit une infinité de solutions, soit aucune solution.

D'après l'exercice 1, il y a une infinité de solutions.

3/ Résolution par le calcul - Méthode par substitution

Méthode par substitution :

Elle consiste à isoler l'une des deux inconnues dans l'une des équations puis à la remplacer dans l'autre équation.

Exemple : Résoudre le système $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$

1. $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 2 - 1 \times 2 = 4 \neq 0$. Donc le système admet une unique solution.

2. $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x = 5 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(5 - 2y) + 2y = 7 \\ x = 5 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15 - 6y + 2y = 7 \\ x = 5 - 2y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -4y = 7 - 15 = -8 \\ x = 5 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{8}{-4} = 2 \\ x = 5 - 2y = 5 - 2 \times 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{S = \{(1; 2)\}}$

Exercice 2 : Résoudre par le calcul les 3 systèmes suivants :

a. $\begin{cases} y - 2x + 1 = 0 \\ y - 2x + 3 = 0 \end{cases}$; b. $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ -2x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$; c. $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x - y + 4 = 0 \end{cases}$

4/Résolution par le calcul - Méthode par combinaison linéaire

Méthode par combinaison linéaire :

Elle consiste à « faire disparaître » une des deux variables inconnues de l'une des deux équations.

Pour la méthode et l'exemple, on va « faire disparaître » la variable x dans la première équation :

1. On multiplie chaque membre de la première équation par le coefficient directeur de la variable x de la deuxième équation.

On multiplie chaque membre de la deuxième équation par le coefficient directeur de la variable x de la première équation.

2. On soustrait membres à membres les deux égalités.

Une inconnue (ici x) est alors simplifiée et on peut calculer la deuxième inconnue (ici y).

3. On peut alors remplacer l'inconnue calculée dans une des deux équations de départ. Cela nous permet de calculer l'autre inconnue.

Exemple : Résoudre le système $\begin{cases} 4x + 2y = 2 \\ 2x - 3y = 13 \end{cases}$

$$1. \begin{cases} 4x + 2y = 2 \\ 2x - 3y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 2 & \times 2 \\ 2x - 3y = 13 & \times 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 4y = 4 \\ 8x - 12y = 52 \end{cases}$$

$$2. \text{ Soustraire les 2 égalités : } (8x + 4y) - (8x - 12y) = 4 - 52 \Leftrightarrow 16y = -48 \Leftrightarrow y = \boxed{-3}$$

$$3. \text{ Trouver la deuxième inconnue : } 4x + 2 \times (-3) = 2 \Leftrightarrow 4x = 2 + 6 = 8 \Leftrightarrow x = \boxed{2}$$

$$\boxed{S = \{(2; -3)\}}$$

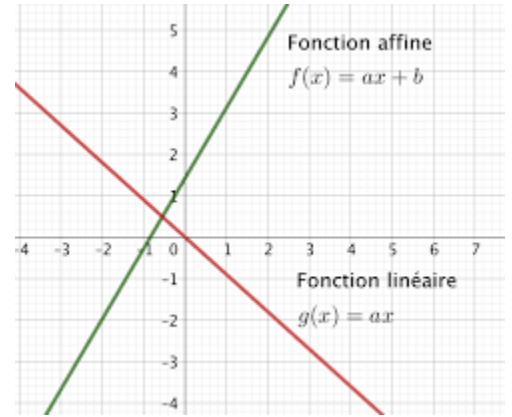
Les fonctions

Partie 5 : Fonctions affines et équations de droite

1/ Définitions et propriétés des fonctions affines

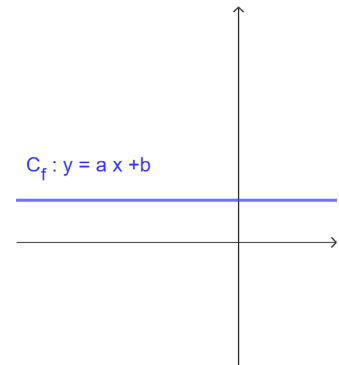
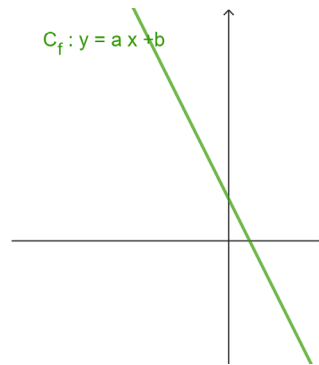
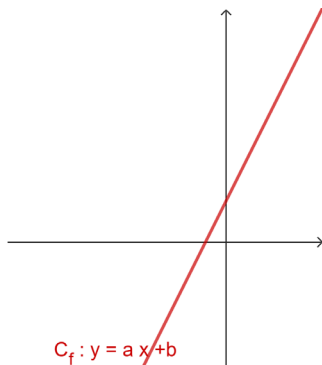
Définitions :

- Une **fonction affine** f est une fonction définie sur \mathbb{R} par :
 $f(x) = ax + b$ où a et b sont 2 nombres réels.
 La représentation graphique d'une fonction affine est une droite qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.
- Une **fonction linéaire** f est une fonction affine telle que $b = 0$. Elle est définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = ax$ où a est un nombre réel.
 La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine du repère.



Propriétés :

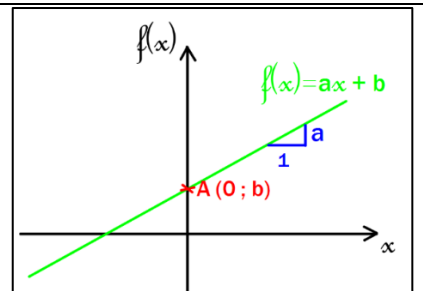
- Si $a > 0$ alors la fonction f est **croissante** sur \mathbb{R} .
- Si $a < 0$ alors la fonction f est **décroissante** sur \mathbb{R} .
- Si $a = 0$ alors la fonction f est **constante** sur \mathbb{R} .



2/ Les équations de droite

Définition et propriété :

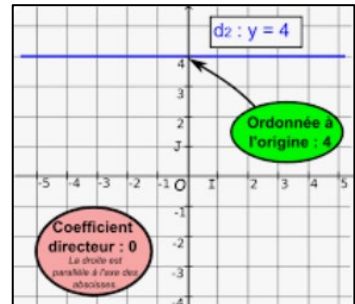
- **L'équation réduite** d'une droite (D) non parallèle à l'axe des ordonnées est $y = a \times x + b$.
 - ✓ a est le **coefficient directeur** de la droite (D).
 - ✓ b est l'**ordonnée à l'origine**.



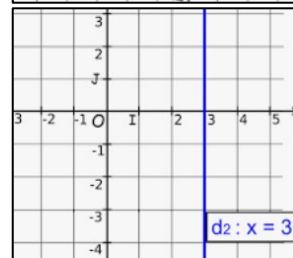
- Si (D) passe par 2 points $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$, alors :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\text{Variation des ordonnées}}{\text{Variations des abscisses}}$$

- **Remarque :** Si la droite est parallèle à l'axe des abscisses (c'est-à-dire « horizontale ») alors :
 - ✓ son coefficient directeur est nul ($a = 0$).
 - ✓ Son équation réduite est $y = \text{constante}$



- **L'équation** d'une droite (D) parallèle à l'axe des ordonnées est : $x = \text{constante}$.



3/ Trouver une équation de droite graphiquement :

Exemple 1 : Trouver l'équation réduite de la droite (d).

Calcul de a (coefficient directeur de la droite) :

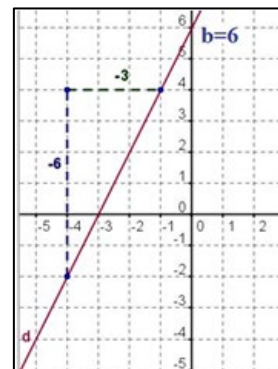
$$a = \frac{\text{Variation des ordonnées}}{\text{Variations des abscisses}} = \frac{-6}{-3} = \boxed{2}$$

Calcul de b (ordonnée à l'origine de la droite) :

b est l'ordonnée du point de la droite coupant l'axe des ordonnées :

$$\boxed{b = 6}$$

L'équation réduite de la droite est donc : $y = 2 \times x + 6$



4/ Trouver l'équation réduite ($y = a \times x + b$) de droite (AB) par le calcul - Exemple

Exemple 2 : Trouver l'équation réduite de la droite (AB) passant par les points $A(2 ; 4)$ et $B(5 ; -2)$.

Calcul de a (coefficient directeur de la droite) : $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2 - 4}{5 - 2} = \frac{-6}{3} = \boxed{-2}$

Calcul de b (ordonnée à l'origine de la droite) :

On sait que le point A appartient à (AB) donc ses coordonnées vérifient l'équation de la droite :

$$y_A = a \times x_A + b \quad \Leftrightarrow \quad 4 = -2 \times 2 + b \quad \Leftrightarrow \quad 4 = -4 + b \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{8 = b}$$

L'équation réduite de la droite est donc : $y = -2 \times x + 8$

La fonction affine est : $f(x) = -2 \times x + 8$

Partie 6 : Les fonctions du second degré

1/ Définitions :

Définitions :

- On appelle **fonction polynôme du second degré** (ou **trinôme du second degré**) toute fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
- a, b, c sont les **coefficients** du trinôme.
- L'**ensemble de définition** est $D_f = \mathbb{R}$ c'est-à-dire que f est calculable pour tout x réel.

Exemple

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3$$

$$a = -1 ; b = 2 ; c = 3$$

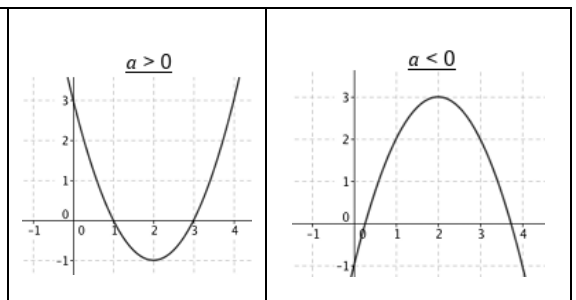
2/ Représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré

Propriétés :

On considère la fonction du second polynôme du second degré telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Sa représentation graphique s'appelle une **parabole**.

- Si $a > 0$, f est décroissante puis croissante.
- Si $a < 0$, f est croissante puis décroissante.



3/ Calculs

Définitions :

- On appelle **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$, le nombre réel, noté Δ , avec $\Delta = b^2 - 4ac$.
- Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \neq 0$) s'appellent les **racines** de l'équation.

	Solutions de $ax^2 + bx + c = 0$	Factorisation	Signe du polynôme	Position de la parabole par rapport à l'axe des abscisses										
$\Delta > 0$	Deux racines distinctes : $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>x_1</td> <td>x_2</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$P(x)$</td> <td colspan="2">signe de a</td> <td>signe de $-a$</td> <td>signe de a</td> </tr> </table> <p>(en supposant ici $x_1 < x_2$)</p>	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	$P(x)$	signe de a		signe de $-a$	signe de a	
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$										
$P(x)$	signe de a		signe de $-a$	signe de a										
$\Delta = 0$	Une racine double : $x_0 = \frac{-b}{2a}$	$f(x) = a(x - x_0)^2$	<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>$\frac{-b}{2a}$</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$P(x)$</td> <td colspan="2">signe de a</td> <td>signe de a</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$	$P(x)$	signe de a		signe de a			
x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$											
$P(x)$	signe de a		signe de a											
$\Delta < 0$	Pas de racine	Pas de factorisation	<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$P(x)$</td> <td colspan="2">signe de a</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$P(x)$	signe de a						
x	$-\infty$	$+\infty$												
$P(x)$	signe de a													

Remarques :

- $ax^2 + bx + c$ est la **forme développée** du trinôme.
- $a(x - x_1)(x - x_2)$ est la **forme factorisée** du trinôme.

4/ Exemples

Exemple 1 : Résolution d'équations et factorisation

Pour les fonctions suivantes définies sur \mathbb{R} , déterminer, s'elles existent, leurs racines.

Vous donnerez les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Puis en donner une factorisation, si cela est possible.

1. $f(x) = 2x^2 - 4x - 30$ $a = 2 ; b = -4 ; c = -30$

$\Delta = b^2 - 4 \times a \times c = (-4)^2 - 4 \times 2 \times (-30) = \boxed{256}$

$\Delta > 0$ Donc le polynôme admet 2 racines qui sont :

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + \sqrt{256}}{2 \times 2} = \boxed{5}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - \sqrt{256}}{2 \times 2} = \boxed{-3}$

Résolution d'équation $f(x) = 0$: $2x^2 - 4x - 30 = 0 \Leftrightarrow \boxed{S = \{-3 ; 5\}}$

Factorisation : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = \boxed{2(x - 5)(x + 3)}$

2. $f(x) = x^2 + 3x + 8$ $a = 1 ; b = 3 ; c = 8$

$\Delta = b^2 - 4 \times a \times c = 3^2 - 4 \times 1 \times 8 = \boxed{-23}$

$\Delta < 0$ Donc le polynôme n'admet pas de racines.

Résolution d'équation $f(x) = 0$: $x^2 + 3x + 8 \Leftrightarrow \boxed{S = \emptyset}$

Factorisation : Le polynôme ne peut pas être factorisé.

3. $f(x) = 0,2x^2 + x + 1,25$ $a = 0,2 ; b = 1 ; c = 1,25$

$\Delta = 0$ Donc le polynôme admet 1 racine double qui est :

$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2 \times 0,2} = \boxed{2,5}$

Résolution d'équation $f(x) = 0$: $0,2x^2 + x + 1,25 \Leftrightarrow \boxed{S = \{2,5\}}$

Factorisation : $f(x) = a(x - x_0)^2 = \boxed{0,2(x - 2,5)^2}$

$f(x) = 0,2(x + 2,5)^2$

Exemple 2 : Résolution d'inéquations et tableau de signes

Après avoir fait le tableau de signes du trinôme, résoudre les inéquations suivantes

1. $f(x) = 2x^2 + 4x - 6 \geq 0$ $a = 2 ; b = 4 ; c = -6$

$\Delta = 64$ $x_1 = 1$ et $x_2 = -3$

x	-3	1	
$f(x)$	+	-	+

Signe de a

Signe de $-a$

Signe de a

$2x^2 + 4x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{S =] - \infty ; -3] \cup [1 ; +\infty[}$

2. $f(x) = -2x^2 + 7x - 10 < 0$ $a = -2 ; b = 7 ; c = -108$

$\Delta = -31$ Il n'y a pas de racines.

x	-∞	+∞
$f(x)$	-	

Signe de a

$-2x^2 + 7x - 10 < 0 \Leftrightarrow \boxed{S =] - \infty ; +\infty[= \mathbb{R}}$

Partie 7 : La fonction exponentielle - Exp

1/ Propriétés de la fonction exponentielle

Théorème : Pour tous les nombres a et b réels, $e^{a+b} = e^a \times e^b$
On dit que la fonction exp transforme une somme en produit.

Propriétés : On en déduit que pour tous réels a et b , et tout entier n :

- $e^0 = 1$; $e^1 = e \approx 2,718$; $\sqrt{e} = e^{1/2}$;
- $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$; $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$; $e^{na} = (e^a)^n$.

2/ Etude de variation de la fonction exponentielle : $x \mapsto e^x$

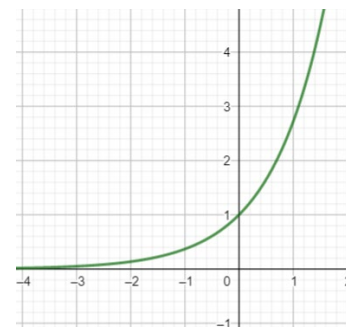
Théorème : La fonction exp est définie, dérivable et continue sur $D_f = \mathbb{R}$

Dérivée : $f'(x) = e^x$ **Primitive :** $F(x) = e^x$

Théorème : • Pour tout nombre x , $e^x > 0$, Donc
• $a < b \Leftrightarrow e^a < e^b$. et $a = b \Leftrightarrow e^a = e^b$.

3/ Tableau de variation de la fonction exponentielle :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x) = e^x$	+	
$f(x) = e^x$	0	$+\infty$
	\nearrow	



Partie 8 : La fonction logarithme népérien - Ln

1/ La fonction réciproque de la fonction exponentielle

- $y = \text{Ln } x \Leftrightarrow x = e^y$, pour $x \in]0 ; +\infty[$ et $y \in \mathbb{R}$.
- $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$
- Pour tout nombre $x > 0$, $e^{\text{Ln } x} = x$.
- Pour tout nombre x , $\text{Ln } e^x = x$.

2) Propriétés de la fonction Ln

Propriété fondamentale : Pour tous réels a et b strictement positifs, $\text{Ln}(ab) = \text{Ln } a + \text{Ln } b$.
« On dit que la fonction Ln transforme un produit en somme »

Corollaire : Soit x et y deux réels strictement positifs et n un entier relatif. Alors, on a :

$$\begin{aligned} \text{Ln}\left(\frac{1}{x}\right) &= -\text{Ln } x & \ln\left(\frac{y}{x}\right) &= \text{Ln } y - \text{Ln } x \\ \text{Ln}(x^n) &= n \times \text{Ln}(x) & \text{Ln}(\sqrt{x}) &= \frac{1}{2} \text{Ln } x \end{aligned}$$

3/ Etude des variations de la fonction Ln : $x \mapsto \ln(x)$

Théorème :

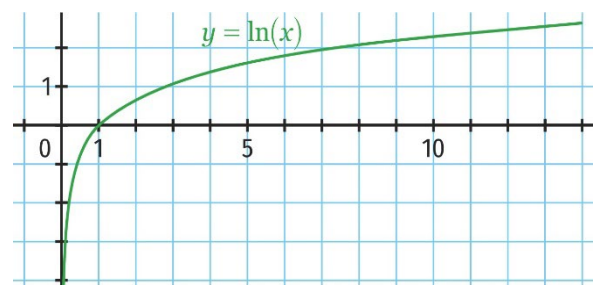
- La fonction logarithme népérien est continue et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$
- La fonction Ln est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .

Conséquences : Pour tous x et y réels strictement positifs et n un entier relatif, on a :

- $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$
- $\ln x < \ln y \Leftrightarrow x < y$
- $\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$
- $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Tableau de variation de la fonction Ln :

x	0	$+\infty$
$\ln'(x) = \frac{1}{x}$		+
$\ln(x)$	$-\infty$	\nearrow



Partie 9 : Ensemble de définition des fonctions

Définition : L'ensemble de définition d'une fonction f est l'ensemble de **tous** les réels x pour lesquels $f(x)$ est calculable.

Méthode - Les questions à se poser :

- Y-a-t-il une racine ? (Confère exemple 2)
- Y-a-t-il un dénominateur ? (Confère exemple 3)
- Y-a-t-il une fonction Ln ? (Confère exemple 4)
- Aucun des 3 ? (Confère exemple 1)

Exemple 1 : Donner le domaine de définition de la fonction telle que : $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

$f(x)$ est calculable pour tout réel.

Donc $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

Exemple 2 : Donner le domaine de définition de la fonction telle que : $f(x) = \sqrt{3x-1}$

$f(x)$ est calculable si et seulement si $3x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$.

Donc $D_f = \left[\frac{1}{3}; +\infty\right[$

Exemple 3 : Donner le domaine de définition de la fonction telle que : $f(x) = \frac{3x-1}{x-2}$

$f(x)$ est calculable si et seulement si le dénominateur est $\neq 0 \Leftrightarrow x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.

Donc $D_f =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Exemple 4 : Donner le domaine de définition de la fonction telle que : $f(x) = \ln(3-x)$

$f(x)$ est calculable si et seulement si $3-x > 0 \Leftrightarrow x < 3$.

Donc $D_f =]-\infty; 3[$

Partie 10 : La dérivation et ses applications

1/ Nombre dérivé et taux de variation

Définitions :

- Une fonction f est dérivable en a si et seulement si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est finie.
- Dans ce cas cette limite est le **nombre dérivé de f en a** . $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
- La quantité $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ s'appelle le **taux de variation** ou le **taux d'accroissement** de la fonction f .

2/ Equation de la tangente :

L'équation de la tangente au point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

3/ Les variations d'une fonction

Théorème sur les variations : Soit f une fonction dérivable sur I et f' sa dérivée.

- $f'(x) \geq 0$ pour tout x de I si et seulement si f est croissante.
- $f'(x) \leq 0$ pour tout x de I si et seulement si f est décroissante.

4/ La convexité

Théorème : Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I .

- f est convexe sur I si et seulement si sa fonction dérivée $f''(x) \geq 0$ sur I .
- f est concave sur I si et seulement si sa fonction dérivée $f''(x) \leq 0$ sur I .
- f admet un point d'inflexion si et seulement si $f''(x) = 0$ et change de signe en ce point.

5/ Tableau des dérivées des fonctions usuelles :

Fonction f	Fonction dérivée	Définie sur	Exemples :
$f(x) = k$ (constante)	$f'(x) = 0$	\mathbb{R}	Si $f(x) = 2$ alors $f'(x) = 0$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	\mathbb{R}	Si $f(x) = -4x + 1$ alors $f'(x) = -4$
$f(x) = x^n$ (pour $n \geq 1$)	$f'(x) = nx^{n-1}$	\mathbb{R}	Si $f(x) = x^2$ alors $f'(x) = 2x$
			Si $f(x) = x^3$ alors $f'(x) = 3x^2$
			Si $f(x) = x^4$ alors $f'(x) = 4x^3$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ pour $n \geq 1$	$f'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$	\mathbb{R}^*	Si $f(x) = \frac{1}{x^2}$ alors $f'(x) = \frac{-2}{x^3}$
			Si $f(x) = \frac{1}{x^3}$ alors $f'(x) = \frac{-3}{x^4}$
			Si $f(x) = \frac{1}{x^4}$ alors $f'(x) = \frac{-4}{x^5}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	\mathbb{R}^{+*}	
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	\mathbb{R}^{+*}	
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	\mathbb{R}	
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	\mathbb{R}	
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	\mathbb{R}	

6/ Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un inverse, d'un quotient et d'une fonction composée :

Fonction	Fonction dérivée	Exemples :
$f = u + v$	$f' = u' + v'$	Si $f(x) = x^5 + x^3$ alors $f'(x) = 5x^4 + 3x^2$
$f = u \times v$	$f' = u' \times v + u \times v'$	Si $f(x) = x^5 \times (2x + 1)$ alors On pose $u(x) = x^5$ et $v(x) = 2x + 1$ On obtient $u'(x) = 5x^4$ et $v'(x) = 2$ Donc $f'(x) = 5x^4 \times (2x + 1) + x^5 \times 2$ $= 10x^5 + 5x^4 + 2x^5 = 12x^5 + 5x^4$
$f = k \times u$ (k réel)	$f' = k \times u'$	Si $f(x) = -7x^5$ alors $f'(x) = -7 \times 5x^4 = -35x^4$.
$f = \frac{1}{v}$ avec $v \neq 0$	$f' = \frac{-v'}{v^2}$	Si $f(x) = \frac{1}{x^2+2x-1}$ alors On pose $v(x) = x^2 + 2x - 1$ Donc $v'(x) = 2x + 2$ Donc $f'(x) = \frac{-(2x+2)}{(x^2+2x-1)^2}$
$f = \frac{u}{v}$ avec $v \neq 0$	$f' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$	Si $f(x) = \frac{x^2-5x}{x+1}$ alors On pose $u(x) = x^2 - 5x$ et $v(x) = x + 1$ On obtient $u'(x) = 2x - 5$ et $v'(x) = 1$ Donc $f'(x) = \frac{(2x-5) \times (x+1) - 1 \times (x^2-5x)}{(x+1)^2}$ $= \frac{2x^2-5x+2x-5-x^2+5x}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-5}{(x+1)^2}$
$f = u^n$	$f' = n \times u' \times u^{n-1}$	Si $f(x) = (3x^2 + 5)^7$ alors $f'(x) = 7 \times (6x) \times (3x^2 + 5)^6 = 42x \times (3x^2 + 5)^6$
$f = \frac{1}{u^n}$ avec $u \neq 0$	$f' = \frac{-n \times u'}{u^{n+1}}$	Si $f(x) = \frac{1}{(x^2+3x+1)^2}$ alors $f'(x) = \frac{-2(2x+3)}{(x^2+3x+1)^3}$
$f = \sqrt{u}$ avec $u > 0$	$f' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	Si $f(x) = \sqrt{2x^2 + 1}$ alors $f'(x) = \frac{4x}{2\sqrt{2x^2+1}} = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$
$f = e^u$	$f' = u' \times e^u$	Si $f(x) = e^{ax+b}$ alors $f'(x) = a \times e^{ax+b}$
		Si $f(x) = e^{-x}$ alors $f'(x) = -e^{-x}$
		Si $f(x) = e^{2x^2-3x+5}$ alors $f'(x) = (4x - 3) \times e^{2x^2-3x+5}$
$f = \ln(u)$	$f' = \frac{u'}{u}$	Si $f(x) = \ln(ax + b)$ alors $f'(x) = \frac{a}{ax + b}$
		Si $f(x) = \ln(2x^2 - 5x + 1)$ alors $f'(x) = \frac{4x - 5}{2x^2 - 5x + 1}$

L'intégration et les équations différentielles

Partie 11 : L'intégration

1/ Intégrale et primitive

Théorème : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$ et F une primitive.

$$\text{Alors } \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

2/ valeur moyenne de f .

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$.

La valeur moyenne de f sur $[a ; b]$ est le réel $m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$.

3/ Intégration par partie (IPP)

Théorème : Soient u et v des fonctions dérivables sur l'intervalle $[a ; b]$ telles que les fonctions u' et v soient continues sur $[a ; b]$.

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b u v'$$

4/ Changement de variable

Théorème : Soit f une fonction continue sur $[a ; b]$. On cherche à calculer $\int_a^b f(x)dx$.

Soit φ une fonction bijective, continue, telle que φ' soit continue et vérifiant $x = \varphi(t)$.

On a $dx = \varphi'(t)dt$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t)) \times \varphi'(t)dt.$$

5/ Tableaux des primitives

Primitives usuelles :

Fonction f	Primitive F	Sur l'ensemble
a (constante réelle)	ax	\mathbb{R}
x	$\frac{x^2}{2}$	\mathbb{R}
$a \times x$ (constante réelle)	$a \times \frac{x^2}{2}$	\mathbb{R}
x^n n entier $n \geq 1$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1}$	\mathbb{R}
$\frac{1}{x^n}$ n entier $n \geq 2$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$	$]0; +\infty[$
e^x	e^x	\mathbb{R}
$\cos(x)$	$\sin(x)$	\mathbb{R}
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	\mathbb{R}
$\frac{1}{1+x^2}$	Arctan (x)	\mathbb{R}
$\frac{1}{x^2+a^2}$ avec $a \neq 0$	$\frac{1}{a} \times \text{Arctan} \left(\frac{x}{a} \right)$	\mathbb{R}
$\cos(ax+b)$ avec $a \neq 0$	$\frac{1}{a} \times \sin(ax+b)$	\mathbb{R}
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a} \times \cos(ax+b)$	\mathbb{R}
e^{ax+b}	$\frac{1}{a} \times e^{ax+b}$	\mathbb{R}

Autres formules :

Fonction f	Primitive F	Conditions
$u' \times u^n$ Avec $n \geq 1$	$\frac{1}{n+1} \times u^{n+1}$	
$\frac{u'}{u}$	$\ln u $	$u \neq 0$
$\frac{u'}{u^n}$ n entier $n \geq 2$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$	$u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$
$u' \times e^u$	e^u	
$u' \times \cos(u)$	$\sin(u)$	
$u' \times \sin(u)$	$-\cos(u)$	

Partie 12 : Les équations différentielles

1/ Méthode de résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 1

0. Si l'équation de l'énoncé n'est pas sous la forme $y' + a(t)y = b(t)$, on se ramène à une telle forme. (En faisant attention de ne pas diviser par 0...)

1. On cherche **TOUTES** les solutions $y_H(t)$ de l'équation homogène (H) : $y' + a(t)y = 0$

On commence par déterminer, sur l'intervalle I , une primitive de la fonction a . On note A cette primitive. Les solutions de l'équation homogène sont alors de la forme $y_H(t) = C e^{-A(t)}$ où $C \in \mathbb{R}$.

2. On cherche **UNE** solution particulière $y_p(t)$ de l'équation (E) : $y' + a(t)y = b(t)$

- Si on connaît la forme de la solution particulière $y_p(t)$, on calcule $y'_p(t)$
On remplace y_p et y'_p dans l'équation de départ (E).
- Si on ne connaît la forme de la solution particulière, on applique la méthode de variation de la constante :
On cherche une solution de la forme $y_p(t) = C(t)e^{-A(t)}$ avec C une fonction dérivable réelle.

3. L'ensemble des solutions de (E) est alors $y(t) = y_H(t) + y_p(t) = C e^{-A(t)} + y_p(t)$ avec C réel ou complexe.

4. Condition initiale : Si on dispose d'une condition initiale, on l'utilise pour déterminer la constante C dans la solution générale $y(t)$.

2/ Méthode de résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 2 :

1) On cherche **TOUTES** les solutions notées $y_H(t)$ de l'équation homogène (H) : $ay'' + by' + cy = 0$.

Définition :

$ar^2 + br + c = 0$ est appelée équation caractéristique de (E). ($a \neq 0$)

Théorème sur la résolution de l'équation homogène (H) :

- Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ alors l'équation caractéristique admet deux racines réelles r_1 et r_2 .
Les solutions de (H) sont $y_H(x) = A e^{r_1 x} + B e^{r_2 x}$; où A et B sont des réels.
- Si $\Delta = 0$ alors l'équation caractéristique admet une racine double r_0 .
Les solutions de (H) sont $y_H(x) = (Ax + B) e^{r_0 x}$; où A et B sont des réels.
- Si $\Delta < 0$ alors l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées
 $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \alpha + i\beta$ et $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \alpha - i\beta$.
Les solutions de (H) sont $y_H(x) = (A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x)) e^{\alpha x}$; où A et B sont des réels.

2) On cherche **UNE** solution particulière notée $y_p(t)$ de l'équation $ay'' + by' + cy = f(t)$.

3) L'ensemble des solutions de (E) sont de la forme $y(t) = y_H(t) + y_p(t)$.

4) Conditions initiales :

Si on dispose de deux conditions initiales ($y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = z_0$), on peut calculer les valeurs de A et B de la solution général $y(t)$.

Les fonctions à plusieurs variables

Partie 13 : Les dérivées partielles

1 / Opérateurs différentiels

Définitions : Soit f une fonction de deux variables.

- Le **gradient** de f est le vecteur

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(a, b) = \nabla f(a, b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \end{pmatrix}$$

- Le **laplacien** d'une fonction à deux variables f est un nombre :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

- La **divergence du champ de vecteur** de \mathbb{R}^2 : $\vec{u} \begin{pmatrix} a(x, y) \\ b(x, y) \end{pmatrix}$ est donnée par :

$$\text{div}(\vec{u}) = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}$$

2/ Théorème de Schwarz :

Si f une fonction de classe C^2 (c'est-à-dire qu'elle est dérivable deux fois et que toutes les dérivées partielles sont continues) alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Partie 14 : Recherche d'extremum :

Définitions :

- Soit f une fonction de deux variables. On appelle **point critique** de f , un point $M \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix}$ tel que $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_c, y_c) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_c, y_c) = 0 \end{cases}$
- On appelle point critique de f , tout point $M(a, b)$ tel que $\overrightarrow{\text{grad}} f(a, b) = \vec{0}$
Autrement dit un point critique est un point pour lequel toutes les dérivées partielles de f s'annulent.

Théorème de Monge :

Soit f une fonction de deux variables et $M \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix}$ un point critique de f . On note $\begin{cases} r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_c, y_c) \\ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_c, y_c) \\ t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_c, y_c) \end{cases}$

3 cas sont possibles :

- $\Delta = rt - s^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad M$ est un extremum local (un maximum si $r < 0$ et un minimum si $r > 0$)
- $\Delta = rt - s^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad M$ est un point de selle (ni un maximum, ni un minimum)
- $\Delta = rt - s^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad$ On ne peut pas conclure

Remarque : Le point M peut être un extremum local mais pas global. Cela signifie qu'une bosse ou un creux se forme en M .

Partie 15 : Intégration en dimension 2

1/ Intégrales multiples

Définition : Soit f une fonction de deux variables x et y définie sur $D \subset \mathbb{R}^2$. On appelle intégrale double de f sur D la valeur $\iint_D f(x, y) dx dy$. Il s'agit d'un **volume algébrique** entre la surface de f et le domaine D .

Remarque : Comme pour les intégrales simples, le volume est calculé négativement lorsque la fonction est négative.

Exemple : Ci-dessous, on représente la surface de la fonction donnée par $f(x, y)$. La figure 1 représente la fonction f . La figure 2 représente la fonction f et le domaine D . Le trait rouge est exactement au-dessus du trait noir ; il délimite D . La figure 3 représente la zone dont le volume est $\iint_D f(x, y) dx dy$.

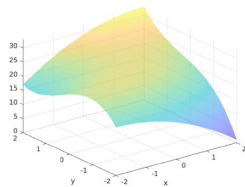


Figure 1

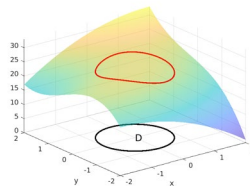


Figure 2

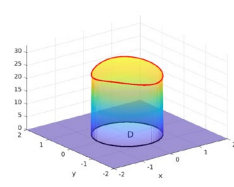


Figure 3

Propriétés : (Identiques aux propriétés d'une intégrale simple.)

- Soient f et g deux fonctions de deux variables x et y définie sur $D \subset \mathbb{R}^2$. Soient α et β deux réels.

$$\iint_D (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) dx dy = \alpha \iint_D f(x, y) dx dy + \beta \iint_D g(x, y) dx dy .$$
- Soit D un domaine borné de \mathbb{R}^2 et $D = D_1 \cup D_2$.

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy .$$

2/ Théorème de Fubini

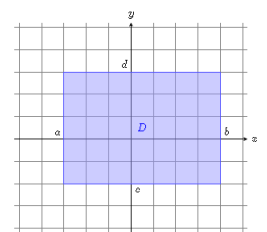
Théorème de Fubini :

Soit f une fonction à deux variables x et y , continue sur un intervalle D .

Si D est un rectangle fermé de \mathbb{R}^2 , c'est-à-dire $D = [a, b] \times [c, d]$ (avec $a < b$ et $c < d$) alors on a :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{y=c}^{y=d} \left(\int_{x=a}^{x=b} f(x, y) dx \right) dy = \int_{x=a}^{x=b} \left(\int_{y=c}^{y=d} f(x, y) dy \right) dx$$

Remarque : Il s'agit d'abord d'intégrer par rapport à x en gardant y constant, puis d'intégrer par rapport à y (ou le contraire).



Exemple : Calculer $\iint_D (xy) dx dy$ avec $D = [3 ; 5] \times [0 ; 1]$

$$\begin{aligned} \iint_D (xy) dx dy &= \int_{y=0}^{y=1} \left(\int_{x=3}^{x=5} xy dx \right) dy = \int_{y=0}^{y=1} y \left(\int_{x=3}^{x=5} x dx \right) dy = \int_{y=0}^{y=1} y \left(\left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=3}^{x=5} \right) dy = \int_{y=0}^{y=1} y \left(\frac{25}{2} - \frac{9}{2} \right) dy \\ &= \int_{y=0}^{y=1} y \times \frac{16}{2} dy = 8 \int_{y=0}^{y=1} y dy = 8 \left(\left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} \right) = 8 \times \frac{1}{2} = \boxed{4} \end{aligned}$$

3/ Intégration d'une fonction à variables séparées

Remarque : Si f est une fonction à variables séparées : $f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$ alors :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \left(\int_a^b g(x) dx \right) \times \left(\int_c^d h(y) dy \right)$$

4/ Intégrale double sur une partie bornée

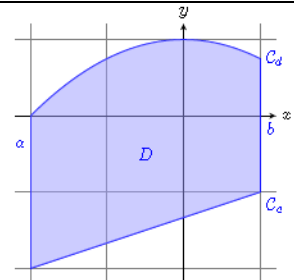
Théorème :

Soit f une fonction à deux variables x et y, continue sur une partie D de \mathbb{R}^2 avec

$D = \{(x, y) \text{ tels que } x \in [a, b] \text{ et } c \leq c(x) \leq y \leq d(x) \leq d\}$

On dit que D est bornée, c'est-à-dire que $D \subset [a, b] \times [c, d]$ et on a :

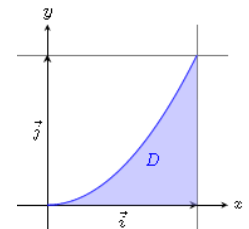
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{x=a}^{x=b} \left(\int_{y=c(x)}^{y=d(x)} f(x, y) dy \right) dx$$



Exemple :

Calculer $\iint_D (2x^2y) dx dy$ avec $D = \{(x, y) \text{ tels que } x \in [0, 1] \text{ et } 0 \leq y \leq x^2\}$

$$\begin{aligned} \iint_D (2x^2y) dx dy &= \int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{y=0}^{y=x^2} 2x^2y dy \right) dx = \int_{x=0}^{x=1} x^2 \left(\int_{y=0}^{y=x^2} 2y dy \right) dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} x^2 \left([y^2]_{y=0}^{y=x^2} \right) dx = \int_{x=0}^{x=1} x^2 \times (x^4) dx = \int_{x=0}^{x=1} x^6 dx \\ &= \left(\frac{x^7}{7} \right)_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{7} \end{aligned}$$



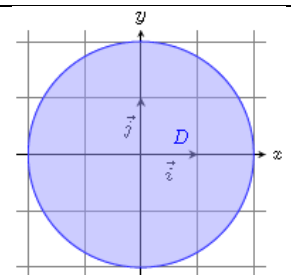
5/ Changement de variables en coordonnées polaires

Le domaine D si la surface est un cercle de centre O(0 ; 0) et de rayon 2.

$D = \{(\rho, \theta) \text{ tels que } 0 \leq \rho \leq 2 \text{ et } \theta \in [0 ; 2\pi]\}$.

On rappelle les relations : $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$ et $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

$dx dy = \rho d\rho d\theta$



Théorème du changement de variable en coordonnées polaires :

Soit f une fonction à deux variables x et y, continue sur une partie D bornée de \mathbb{R}^2 .

On a : $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\rho=0}^{\rho=2} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \times \rho d\rho d\theta$

Exemple : Calculer $\iint_D \frac{2}{1+x^2+y^2} dx dy$ avec D le cercle de centre O(0, 0) et de rayon 2.

On explicitera le changement de variables et ainsi que l'ensemble D avec les nouvelles variables.

$D = \{(\rho, \theta) \text{ tels que } 0 \leq \rho \leq 2 \text{ et } \theta \in [0 ; 2\pi]\}$.

On effectue le changement de variables $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$

$dx dy = \rho d\rho d\theta$

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{2}{1+x^2+y^2} dx dy &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\rho=0}^{\rho=2} \frac{2}{1+\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta} \rho d\rho d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left(\int_{\rho=0}^{\rho=2} \frac{2\rho}{1+\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta} d\rho \right) d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left(\int_{\rho=0}^{\rho=2} \frac{2\rho}{1+\rho^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} d\rho \right) d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left(\int_{\rho=0}^{\rho=2} \frac{2\rho}{1+\rho^2} d\rho \right) d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left([\ln(1+\rho^2)]_{\rho=0}^{\rho=2} \right) d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \ln(5) d\theta = \ln(5) \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} 1 d\theta = \ln(5) [\theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \\ &= \boxed{2\pi \ln(5)} \end{aligned}$$

Partie 16 : Différentielle et primitive

1/ Différentielle :

Définition :

Soit f une fonction de deux variables. On appelle **différentielle de f** et on note df la quantité $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$

2/ Lemme de Poincaré

Définitions :

On dit qu'une différentielle $\omega = p(x, y) dx + q(x, y) dy$ est **exacte** S'il existe une fonction f de deux variables (**primitive de ω**) telle que :

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = p(x, y)$ et
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = q(x, y)$

Lemme de Poincaré :

Soit ω une différentielle de deux variables telle que $\omega = p(x, y) dx + q(x, y) dy$ définie sur $D = [a, b] \times [c, d]$.

Si $\frac{\partial p}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial q}{\partial x}(x, y)$ alors la différentielle ω est exacte. Et donc la primitive f existe.

3/ Comment trouver une primitive d'une différentielle :

Pour trouver une primitive f d'une différentielle $\omega = p(x, y) dx + q(x, y) dy$:

1. On identifie $p(x, y)$ et $q(x, y)$

2. On vérifie que la différentielle est exacte : A-t-on $\frac{\partial p}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial q}{\partial x}(x, y)$?

3. On recherche la primitive f de ω . $f(x, y) = \underbrace{a(x, y)}_{\text{Fonction dépendant de } x \text{ et de } y} + \underbrace{b(y)}_{\text{Fonction ne dépendant que de } y} + \underbrace{c(x)}_{\text{Fonction ne dépendant que de } x}$

4/ Intégrale curviligne d'une différentielle EXACTE le long d'un chemin

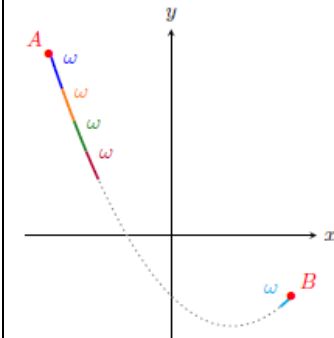
Propriété : On considère une différentielle ω est **exacte** et **f sa primitive**

On considère le chemin $\Gamma = \overline{AB}$

alors $\int_{\Gamma} \omega = \int_A^B \omega = [f(x, y)]_A^B = f(B) - f(A)$

Remarque : Cette intégrale est **indépendante** du chemin entre l'état initial A et l'état final B .

5/ Intégrale curviligne d'une différentielle **NON EXACTE** le long d'un chemin



Comprendre l'intégrale curviligne : $\int_{\widehat{AB}} \omega$

Si ω est une différentielle, $\int_{\widehat{AB}} \omega$ est la somme de chaque déplacement infinitésimal ω sur le chemin reliant A et B.

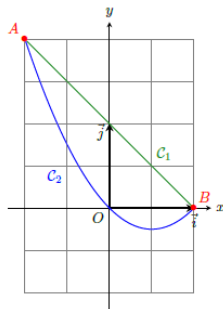
- Si la différentielle ω **est exacte**, cette somme **ne dépend pas** du chemin considéré. La somme dépend des points A et B.
- Si la différentielle ω **n'est pas exacte**, cette somme **dépend** du chemin considéré.

5/ a. Qu'est-ce qu'un chemin ?

Définition : On appelle chemin de A à B, et on note \widehat{AB} , toute courbe continue reliant le point A au point B.

Remarque : Attention : $\widehat{AB} \neq \widehat{BA}$

Exemple : J'ai tracé 2 chemins reliant A $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ et B $\left(1; 0\right)$:



- Le chemin C_1 est la portion de droite reliant A et B d'équation $y = 1 - x$
 $C_1 = \{(x, 1 - x) \text{ avec } x \in [-1; 1]\}$
- Le chemin C_2 est la portion de parabole reliant A et B d'équation $y = x^2 - x$
 $C_2 = \{(x, x^2 - x) \text{ avec } x \in [-1; 1]\}$

Equations paramétriques usuels des différents chemins :

• Equation paramétrique du **segment [AB]** avec $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.

$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = x_A + t \times x_{\widehat{AB}} \\ y(t) = y_A + t \times y_{\widehat{AB}} \end{cases} \text{ pour } t \in [0; 1]. \quad \text{avec } \begin{cases} x_{\widehat{AB}} = x_B - x_A \\ y_{\widehat{AB}} = y_B - y_A \end{cases}$$

• Equation paramétrique du **cercle de centre** $\Omega(x_\Omega; y_\Omega)$ et de rayon R.

$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = R \cos(t) + x_\Omega \\ y(t) = R \sin(t) + y_\Omega \end{cases} \text{ pour } t \in [0; 2\pi].$$

• Equation paramétrique d'une **fonction f** définie sur $[a; b]$ et à valeur réelle : $y = f(x)$.

$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases} \text{ pour } t \in [a; b].$$

Calcul de l'intégrale d'une différentielle non exacte :

Propriété : On considère une différentielle ω **est non exacte**. $\omega = p(x, y) dx + q(x, y) dy$.

On considère le chemin $\Gamma = \{(x(t); y(t)) \text{ avec } t \in I = [a; b]\}$. On dit le chemin Γ suit une courbe paramétrée. L'intégrale curviligne de ω le long du chemin Γ est :

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_{t=a}^{t=b} (p(x(t), y(t)) \times x'(t) + q(x(t), y(t)) \times y'(t)) dt$$

Remarque : Cette intégrale ne dépend plus que de la variable t.

Algèbre et géométrie

Partie 17 : Les conversions d'unités

Un peu d'histoire :

<https://metrologie-francaise.lne.fr/fr/metrologie/histoire-des-unites>

La méthode de détermination des unités de base de la longueur a considérablement évolué au fil du temps.

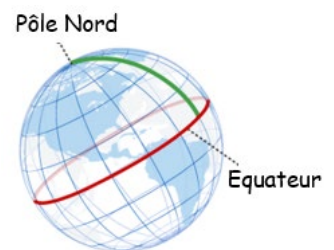
Au départ, la référence était le corps humain. Par exemple, la coudée était une unité représentant la longueur du coude au bout des doigts. Cette unité était utilisée par des civilisations antiques en Mésopotamie, en Égypte et à Rome. La longueur variait selon la région, de 450 à 500 mm. Des études ont démontré que les pyramides d'Égypte, connues pour l'exceptionnelle précision de leur construction, ont été bâties à partir de deux types de coudées : une longue et une courte. On suppose qu'à cette époque, les unités de longueur standard étaient déterminées en prenant pour référence le corps du dirigeant au pouvoir ou de toute autre personnalité puissante.

En 1795, il existait en France plus de sept cents unités de mesure différentes.

Alors que l'industrialisation mettait fin à l'ère des Grandes Découvertes, principalement en Europe de l'Ouest, il devint nécessaire d'unifier les unités de longueur à l'international. La discussion fut lancée en Europe au XVIIe siècle. Après un siècle de débats, la France proposa l'unité du mètre (qui signifie mesurer en grec) en 1791.

Le mètre fut alors défini à partir du méridien terrestre entre le pôle Nord et l'équateur. Un mètre représentait 1/10 000 000 du méridien.

Plus tard, un prototype du mètre conçu en alliage platine-iridium, hautement résistant à l'oxydation et à l'abrasion, fut créé en France à la fin du XIXe siècle dans une volonté d'unifier les références dimensionnelles à l'international.



1/ Unités métriques

- **Unités de longueur (dimension 1) : Le mètre (m).**

On peut utiliser le tableau suivant :

Kilomètre km	Hectomètre hm	Décamètre dam	Mètre m	Décimètre dm	Centimètre cm	Millimètre mm
	1	0	0	0	0	

Par exemple : 1 hm = 100 m = 10 000 cm

- **Unités d'aire ou de surface (dimension 2) : Le mètre carré (m²).**

On peut utiliser le tableau suivant :

km ²	hm ²	dam ²	m ²	dm ²	cm ²	mm ²
	1	0	0	0	0	

Par exemple : 1 hm² = 100 dam² = 10 000 m²

- **Unités de volume et de contenance (dimension 3) : Le mètre cube (m³).**

On peut utiliser le tableau suivant :

km ³	hm ³	dam ³	m ³	dm ³	cm ³	mm ³
			kL	hL	daL	L
			0	0	0	0
				dL	cL	mL
				0	0	1

Par exemple : 1 cm³ = 0,000 001 m³ = 0,001 L = 1 mL

2/ Autres unités :

On peut adapter le tableau des unités de longueur à d'autres unités (Volt, Ampère, ...).

Téra- T	Giga- G	Méga- M	Kilo- k	Hecto- h	Déca- da	[unité]	Déci- d	Centi- c	Milli- m	Micro- μ	Nano- n
10 ¹²	10 ⁹	10 ⁶	10 ³	10 ²	10	1	10 ⁻¹	10 ⁻²	10 ⁻³	10 ⁻⁶	10 ⁻⁹

Rappel : 1 tonne = 10³ kg = 1000 kg

3/ Température :

$$\text{Celsius} = \text{Kevin} - 273,15 \quad \Leftrightarrow \quad ^\circ\text{C} = \text{K} - 273,15$$

4/ Unités de temps :

- 1 an = 365 jours (par convention)
- 1 jour = 24 heures (24h)
- 1 h = 60 minutes (60 min) = 3600 s
- 1 min = 60 secondes (60 s)

Exemple 1 : Convertir 14 h 26 min 13 s en secondes

14 h =	14 * 60 * 60 =	50 400 s
26 min =	26 * 60 =	1 560 s
13 s =		13 s
14 h 26 min 13 s =		51 973 s

Exemple 2 : Convertir 8 412s en Heures - Minutes - Secondes

- Convertir des secondes en minutes :
 $8412 / 60 = 140,2$ minutes
 Or 0,2 minutes = $0,2 * 60 = 12$ s
 Donc 8 412 s = 140 min 12 s
- Convertir des minutes en heures :
 $140 / 60 = 2,33333$
 2h = 120 minutes
 Donc 140 minutes = 2 h 20 minutes
- Bilan : 8 412s = **2 h 20 min 12 s**

5/ Unité de vitesse :

$$\text{Vitesse} = \frac{\text{distance}}{\text{temps}}$$

Donc une unité de vitesse est une unité de distance divisée par une unité de temps (on appelle cela une **grandeur quotient**).


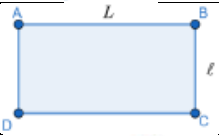
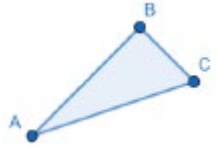
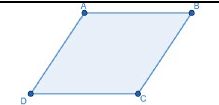
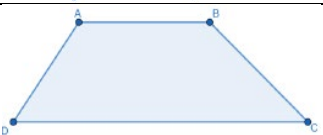
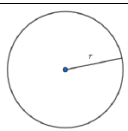
Cela peut être des mètres par minute, des kilomètres par seconde, etc.

Exemple : Le débit d'évacuation d'une baignoire est de 40 L/min. On souhaite convertir ce débit en m³/h.


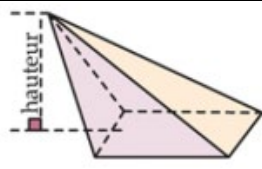
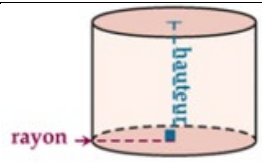
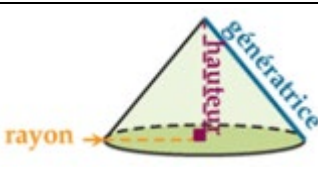
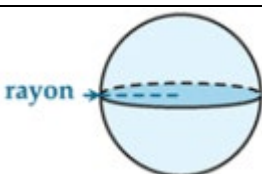
$$40 \text{ L/min} = 40 \frac{\text{L}}{\text{min}} = \frac{40 \text{ L}}{1 \text{ min}} = \frac{0,04 \text{ m}^3}{\frac{1}{60} \text{ h}} = 0,04 \times 60 \frac{\text{m}^3}{\text{h}} = 2,4 \text{ m}^3/\text{h}$$

Partie 18 : Surfaces et volumes

1/ Surfaces des solides usuels en dimension 2

<p>1. Le carré : $Aire = \text{côté} \times \text{côté}$</p>	
<p>2. Le rectangle. $Aire = \text{Longueur} \times \text{largeur}$</p>	
<p>3. Le triangle $Aire = \frac{\text{Base} \times \text{Hauteur}}{2}$</p>	
<p>4. Le parallélogramme $Aire = \text{Base} \times \text{Hauteur}$</p>	
<p>5. Le trapèze $Aire = \frac{(\text{Première Base} + \text{deuxième base}) \times \text{Hauteur}}{2}$</p>	
<p>6. Le cercle $Aire = \pi \times \text{rayon}^2$ $Périmètre = 2\pi \times \text{rayon}$</p>	

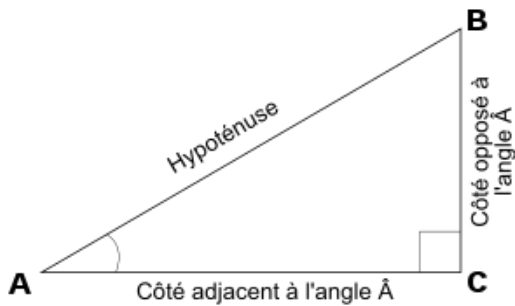
2/ Surfaces latérales et volume des solides usuels en dimension 3

<p>1. Le parallélépipède rectangle. $Volume = \text{Longueur} \times \text{Largeur} \times \text{Hauteur}$</p>	
<p>2. La pyramide. $Volume = \frac{\text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}}{3}$</p>	
<p>3. Le cylindre de révolution $Volume = \text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}$ $Surface \text{ latérale} = 2\pi \times \text{rayon}^2 + 2\pi \times \text{rayon} \times \text{hauteur}$</p>	
<p>4. Le cône de révolution $Volume = \frac{\text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}}{3}$</p>	
<p>5. La sphère $Volume = \frac{4}{3} \times \pi \times \text{rayon}^3$ $Surface \text{ latérale} = 4\pi \times \text{rayon}^2$</p>	

Partie 19 : Trigonométrie

1/ Propriétés dans un triangle

Dans un triangle ABC rectangle en A, on peut calculer les cosinus, sinus et tangente :



$$\sin \hat{A} = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{\text{Côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{AB}$$

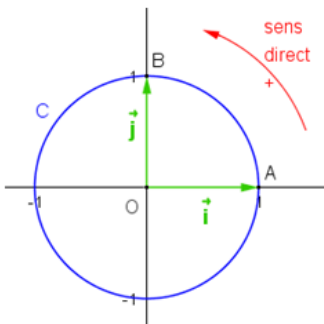
$$\tan \hat{A} = \frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}} = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Côté adjacent}} = \frac{BC}{AC}$$

2/ Tableau de conversion radians/degrés :

$$180 \times y = \pi \times x$$

Degrés	180	x
Radians	π	y

3/ Cercle trigonométrique, Cosinus et Sinus



Définition : Soit $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ un repère orthonormé. Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1 orienté dans le sens direct (sens contraire des aiguilles d'une montre).

Rayon du cercle = 1

Définition : Tout réel θ se représente par un point M sur le cercle tel que l'angle orienté (\vec{OA}, \vec{OM}) est égal à θ radians.

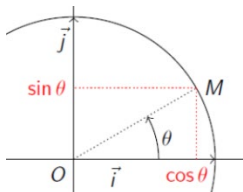
Propriété : Pour tout réel x et tout entier relatif k , les points $M(x)$ et $M(x + 2k\pi)$ sont confondus sur le cercle.

Définition : La mesure principale d'un angle est sa mesure en radians dans l'intervalle $] -\pi ; \pi]$.

Définition : Soit M un point du cercle tel que $\hat{x} = \widehat{IOM}$

- On appelle **cosinus de x** et on note $\cos x$, l'abscisse du point M.
- On appelle **sinus de x** et on note $\sin x$, l'ordonnée du point M.
- On définit la **tangente de x** (Si $\cos x \neq 0$) par $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

M a donc pour coordonnées $(\cos x ; \sin x)$.



4/ Angles remarquables

	x (en degré)	0°	30°	45°	60°	90°
	x (en rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
	$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
	$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

5/ Propriétés

Formules de symétrie :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$$

$$\sin(\pi - x) = \sin(x)$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$$

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

Formules fondamentales :

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$;
- $-1 \leq \cos x \leq 1$;
- $-1 \leq \sin x \leq 1$
- $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$
- $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$

6/ Formules d'addition

$\cos(a + b) = \cos(a) \times \cos(b) - \sin(a) \times \sin(b)$ $\sin(a + b) = \sin(a) \times \cos(b) + \cos(a) \times \sin(b)$	$\cos(a - b) = \cos(a) \times \cos(b) + \sin(a) \times \sin(b)$ $\sin(a - b) = \sin(a) \times \cos(b) - \cos(a) \times \sin(b)$
---	---

$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2 \cos^2(a) - 1 = 1 - 2 \sin^2(a)$ $\sin(2a) = 2 \times \sin(a) \times \cos(b)$

$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a) \times \tan(b)}$ $\tan(2a) = \frac{2 \tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$	$\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a) \times \tan(b)}$
---	--

Remarque : Les formules de tangente doivent être redémontrer à chaque fois.

7/ Formules de linéarisation

$\cos(a) \times \cos(b) = \frac{1}{2} (\cos(a + b) + \cos(a - b))$ $\sin(a) \times \sin(b) = \frac{1}{2} (\cos(a + b) - \cos(a - b))$ $\sin(a) \times \cos(b) = \frac{1}{2} (\sin(a + b) + \sin(a - b))$
--

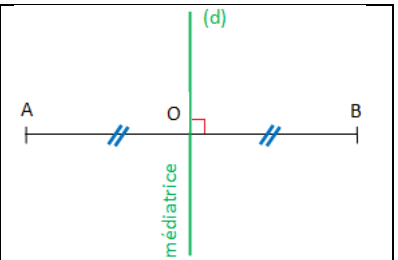
Remarque : Ces formules s'obtiennent en additionnant ou en soustrayant les formules d'addition.

Partie 20 : Rappels de géométrie plane

1/ Médiatrice d'un segment

Définition : La médiatrice d'un segment est la droite qui passe par le milieu du segment et qui est perpendiculaire à ce segment.

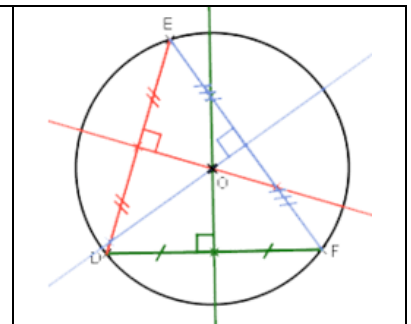
Remarque : Tous les points de cette médiatrice sont à égale distance des extrémités du segment.



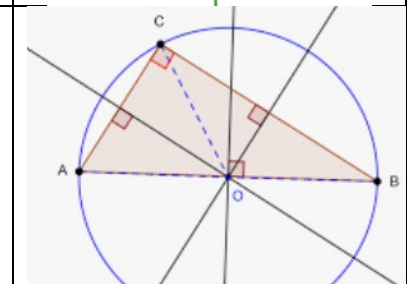
2/ Médiatrices d'un triangle

Propriété : Les **médiatrices** (droites passant par le milieu d'un côté et perpendiculaire à ce côté) d'un triangle sont concourantes en un point O appelé centre du **cercle circonscrit**.

Définition : Le **cercle circonscrit** est le cercle passant par les trois sommets du triangle.



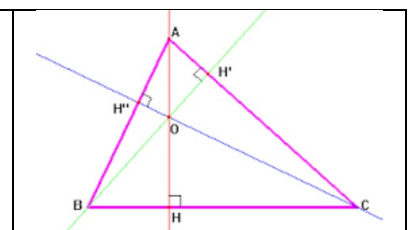
Théorème : Le triangle ABC est rectangle en C si et seulement si [AB] est le diamètre de son cercle circonscrit.



3/ Hauteurs d'un triangle

Définition : Les **hauteurs** sont les droites passant par un sommet et perpendiculaire au côté opposé.

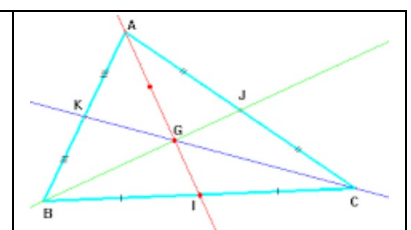
Théorème : Les hauteurs se coupent en l'**orthocentre**.



4/ Médiannes d'un triangle

Définition : Les **médiannes** (droites passant par un sommet et par le milieu du côté opposé).

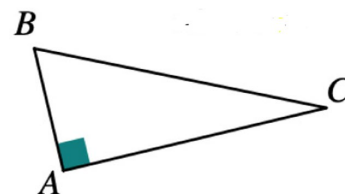
Théorème : Elles sont concourantes en un point appelé **centre de gravité G** du triangle.



5/ Le théorème de Pythagore

Théorème :

Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $BC^2 = AC^2 + AB^2$.



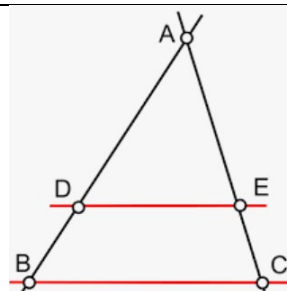
6/ Le théorème de Thalès

Théorème :

Soient A, D, B trois points alignés dans cet ordre et distincts deux à deux.

Soient A, E, C trois points alignés dans cet ordre et distincts deux à deux.

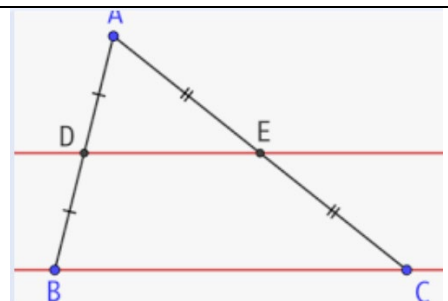
(BC) // (DE) si et seulement si $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$



Cas particulier : Le théorème du milieu :

Si D est le milieu de [AB] et E est le milieu de [AC].

Alors (BC) // (DE) si et seulement si $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{2}$



Partie 21 : Géométrie analytique en dimension 2

1/ Généralité

Vecteurs et points : Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère quelconque du plan.

Si $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ sont deux points du plan alors $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Propriété du parallélogramme : Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère quelconque du plan.

Soit ABCD quatre points deux à deux distincts.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si ABDC est un parallélogramme (éventuellement aplati.)



Milieu : Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère quelconque du plan.

Le milieu M du segment [AB] a pour coordonnées : $\begin{cases} x_M = \frac{x_B + x_A}{2} \\ y_M = \frac{y_B + y_A}{2} \end{cases}$.

Normes ou distances admise : Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan.

Soient $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ deux points.

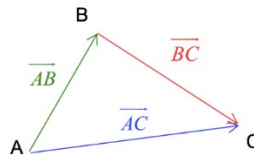
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Soit $\vec{u}(x; y)$ un vecteur.

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Relation de Chasles : Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère quelconque du plan.

Pour tous points A, B et C du plan, on a : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.



2/ Déterminant

Définitions : Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère quelconque du plan.

On appelle déterminant de \vec{u} et \vec{v} la quantité $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$

Propriété 1 : Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère quelconque du plan.

Les vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Propriété 2 : Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan.

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\vec{u}, \vec{v})$$

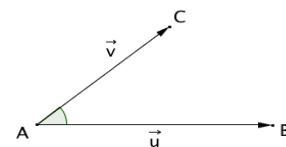
3/ Produit scalaire

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un **repère orthonormé** du plan.

Définition : Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan.

On appelle **produit scalaire** de \vec{u} par \vec{v} , noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, le **nombre réel** défini par :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, si l'un des deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} est nul
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$, dans le cas contraire.



Propriété avec les coordonnées :

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de coordonnées respectives $(x; y)$ et $(x'; y')$.

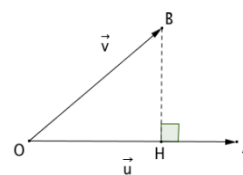
On a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

Propriété produit scalaire et projeté orthogonal :

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls du plan tels que $\vec{u} = \vec{OA}$ et $\vec{v} = \vec{OB}$.

H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA).

On a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OA} \cdot \vec{OH}$



Partie 22 : Les complexes

1/ Forme algébrique d'un nombre complexe

Théorème admis : Il existe un ensemble noté \mathbb{C} , d'éléments appelés nombres complexes tels que :

- \mathbb{C} contient un élément i tel que $i^2 = -1$;
- **Forme algébrique d'un nombre complexe :** $z = a + ib$ où a et b sont des réels.
- **Conjugué d'un nombre complexe :** $\bar{z} = a - ib$

Relation fondamentale : Si $z = a + ib$ alors $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$.

2 / Equation du second degré à coefficients réels

Dans \mathbb{C} , l'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b et c réels admet **toujours** des solutions.

- Si $\Delta > 0$ alors l'équation admet deux solutions réelles.
- Si $\Delta = 0$ alors l'équation admet une solution double réelle.
- Si $\Delta < 0$ alors l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{avec} \quad z_2 = \bar{z}_1$$

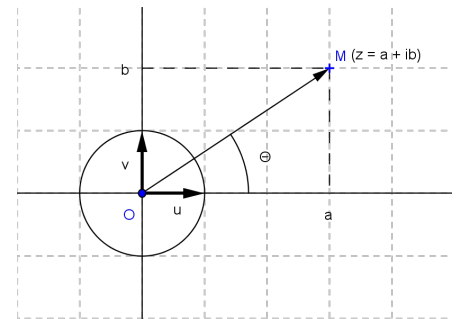
3 / Forme exponentielle d'un complexe non nul

Définitions :

Le plan est muni d'un repère $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.

Soit M le point d'affixe $z = a + ib$, représenté ci-dessous.

- Le **module** de z , noté $|z|$, est la distance OM .
- On appelle **argument** de z , noté $\arg(z)$, la mesure $\theta [2\pi]$.
C'est-à-dire $\theta = \arg(z) = \text{angle}(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$
- $z = |z| e^{i\theta}$ est appelée **forme exponentielle d'un nombre complexe**.



Exemple : Le complexe de module 1 dont un argument est θ est noté $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

Passage des coordonnées cartésiennes à la forme trigonométrique :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Passage de la forme trigonométrique aux coordonnées cartésiennes :

$$a = |z| \cos \theta \quad \text{et} \quad b = |z| \sin \theta$$