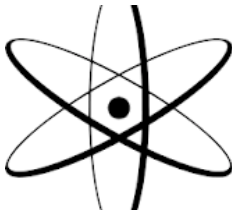


CM2 Physique Atomique : Atome d'hydrogène

S. Bernon

September 11, 2025



Principaux résultats 1

① Hamiltonien du système à 2 corps

$$\hat{H} = \frac{\mathbf{p}_p^2}{2M_p} + \frac{\mathbf{p}_e^2}{2M_e} + V(\mathbf{r}) = \frac{\vec{P}^2}{2M} + \left[\frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + V(\mathbf{r}) \right] \quad (1)$$

$$\text{avec } M = M_p + M_e \text{ et } \mu = \frac{M_e M_p}{M_e + M_p} \simeq M_e$$

Principaux résultats 1

1 Hamiltonien du système à 2 corps

$$\hat{H} = \frac{\mathbf{p}_p^2}{2M_p} + \frac{\mathbf{p}_e^2}{2M_e} + V(\mathbf{r}) = \frac{\vec{P}^2}{2M} + \left[\frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + V(\mathbf{r}) \right] \quad (1)$$

avec $M = M_p + M_e$ et $\mu = \frac{M_e M_p}{M_e + M_p} \simeq M_e$

2 Solution du type $\Psi(\mu) = e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}} \cdot \psi(\mathbf{r})$ avec $E_{\text{propre}} = \frac{\hbar^2 \mathbf{K}^2}{2M} + E_{\text{rel}}$ et $\hat{H}_{\text{rel}} \psi(\mathbf{r}) = E_{\text{rel}} \psi(\mathbf{r})$

3 Etats stationnaires : $\hat{H} \psi(\mathbf{r}) = \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) = E \psi(\mathbf{r})$

4 Laplacien ne dépend que de θ et ϕ :

$$\Delta = \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \cdot)}_{=A(\mathbf{r}) \times (-2m_e/\hbar^2)} + \underbrace{\frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \sin \theta}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)}_{=\hat{L}^2/\hbar^2}$$

5 $\hat{H} = \hat{A}(r) - \frac{1}{2m_e r^2} \hat{L}^2$

Principaux résultats 2

① Fonction d'onde:

$$\psi(\mathbf{r}) = R_{l,m}^n(r) \times \phi_{l,m}(\theta, \phi)$$

② Le problème à résoudre

$$\begin{cases} \left[\hat{A}(\mathbf{r}) - \frac{1}{2m_e r^2} \hat{L}^2 \right] R_{l,m}^n(\mathbf{r}) \phi_{l,m}(\theta, \phi) &= E_{l,m}^n R_{l,m}^n(\mathbf{r}) \phi_{l,m}(\theta, \phi) \\ \hat{L}^2 \phi_{l,m}(\theta, \phi) &= L_{l,m} \phi_{l,m}(\theta, \phi) \end{cases}$$

Principaux résultats 2

1 Fonction d'onde:

$$\psi(\mathbf{r}) = R_{l,m}^n(r) \times \phi_{l,m}(\theta, \phi)$$

2 Le problème à résoudre

$$\begin{cases} \left[\hat{A}(\mathbf{r}) - \frac{1}{2m_e r^2} \hat{L}^2 \right] R_{l,m}^n(\mathbf{r}) \phi_{l,m}(\theta, \phi) &= E_{l,m}^n R_{l,m}^n(\mathbf{r}) \phi_{l,m}(\theta, \phi) \\ \hat{L}^2 \phi_{l,m}(\theta, \phi) &= L_{l,m} \phi_{l,m}(\theta, \phi) \end{cases}$$

3 Moment cinétique $\hat{\mathbf{J}} \times \hat{\mathbf{J}} = i\hbar \hat{\mathbf{J}}$

4 Valeur et vecteur propre $\hat{\mathbf{J}}^2 |j, m\rangle = j(j+1)\hbar^2 |j, m\rangle$

$$\hat{J}_z |j, m\rangle = m\hbar |j, m\rangle$$

5 Moment cinétique orbitale $\psi_m(\mathbf{r}) = \phi_m(\mathbf{r}, \theta) \exp(im\varphi)$.

6 Harmoniques sphériques

$$\hat{L}_{\pm} Y_{l,m}(\theta, \phi) = \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} \hbar Y_{l,m \pm 1}(\theta, \phi)$$

Principaux résultats 3

① $\hat{L}^2 Y_{l,m} = l(l+1)\hbar^2 Y_{l,m}.$

② Equation au valeur propre radiale

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2mr} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} + V(\mathbf{r}) \right] R_{l,m}^n(\mathbf{r}) = E_n R_{l,m}^n(\mathbf{r}).$$

③ Energie propre

$$E_n = \frac{E_l}{(n' + l + 1)^2} = \frac{E_l}{n^2}$$

et

$$E_l = \frac{me^4}{2\hbar^2} \simeq 13,6\text{eV}.$$