Synthèse de cours sur les suites numériques monotones (prérequis)

1 Les définitions

Définition 1:

On dit qu'une suite réelle (u_n) converge s'il existe un réel l telle que u_n tende vers l quand n tend vers $+\infty$.

Définition 2:

On dit qu'une suite réelle (u_n) diverge si elle ne converge pas.

Définition 3:

On dit qu'une suite réelle (u_n) est :

— croissante si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geq u_n$.

— décroissante si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leq u_n$.

— monotone si (u_n) est croissante ou décroissante.

Définition 4:

On dit qu'une suite réelle (u_n) est :

— majorée s'il existe un réel M telle que pour tout entier naturel n, $u_n \leq M$.

— minorée s'il existe un réel m telle que pour tout entier naturel n, $u_n \geq m$.

2 Liens entre ces définitions

Théorème 1: Propriété des suites croissantes et majorées

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On suppose que cette suite est à la fois :

— croissante ;

— majorée.

Alors elle est convergente.

De plus, si M est un majorant de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et si l est sa limite, on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \leq l \leq M.$$

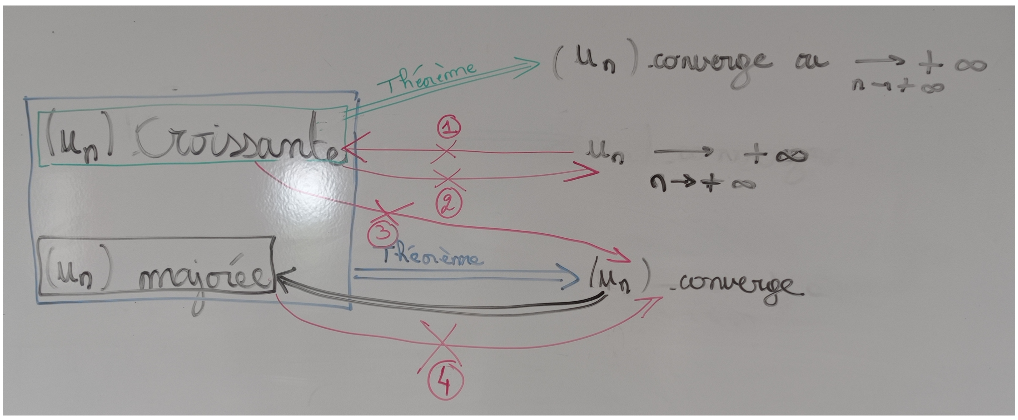
Théorème 2: Propriété des suites croissantes

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de nombres réels. Alors

— soit elle est majorée auquel cas elle converge.

— soit elle tend vers $+\infty$.

Voici un schéma qui résume et complète les résultats de cours précédents :



Nous justifions ici les points numérotés du schéma.

1. Le fait que u_n tende vers $+\infty$ ne garantit pas la croissance. Par exemple, la suite $u_n = n + (-1)^n$ tend vers $+\infty$ mais ne croit pas.

2. La croissance ne garantit pas non plus le fait de tendre vers $+\infty$. L'hypothèse "(u_n) majorée" est empêche de tendre vers $+\infty$. Par exemple $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ définit une suite croissante de limite égale à 1.

3. Une suite croissante ne converge pas toujours. Par exemple, celle définit par $u_n = n$.

4. Une suite majorée ne converge pas forcément. Il suffit ajouter l'hypothèse de croissance pour garantir la convergence. La suite définie par $u_n = (-1)^n$ est majorée mais ne converge pas car elle n'a pas de limite.

On a également le résultat symétrique sur les suites décroissantes qui est vrai :

Théorème 3: Propriété des suites décroissantes minorées

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On suppose que cette suite est à la fois :

- décroissante ;
- minorée.

Alors elle est convergente.

De plus, si m est un minorant de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et si l est sa limite, on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad m \leq l \leq u_n.$$

Ce théorème se justifie avec le fait que si (u_n) est une suite décroissante minorée alors $(-u_n)$ est croissante majorée donc converge.

3 Suites adjacentes

Définition 5: Définition des suites adjacentes

On dit que deux suites réelles (u_n) et (b_n) sont adjacentes si :

— (u_n) est croissante, (b_n) est décroissante.

— $u_n - b_n$ tend vers 0 en $+\infty$.

Théorème 4: Théorème des suites adjacentes

Soient (u_n) et (b_n) deux suites adjacentes alors :

— (u_n) et (b_n) convergent.

— Leur limite est la même.

Synthèse de cours sur les équivalents

Définition 6: Négligeabilité/Dominance

Soient deux suites réelles (u_n) et (b_n). On dit que u_n est négligeable devant b_n en $+\infty$, noté

$$u_n \underset{+\infty}{=} o(b_n) \text{ ou encore } u_n \underset{+\infty}{\ll} b_n,$$

s'il existe une suite (ε_n) tendant vers 0 en $+\infty$ telle que pour tout entier naturel n,

$$u_n = b_n \epsilon_n.$$

De manière équivalente, on dit aussi que b_n domine u_n en $+\infty$.

Définition 7: Négligeabilité : Cas particulier

Soient deux suites réelles (u_n) et (b_n) telles que b_n ne s'annule pas (ou alors plus à partir d'un certain entier). $u_n = o(b_n)$ en $+\infty$ si $\dfrac{u_n}{b_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Définition 8: Équivalent

On dit que deux suites réelles (u_n) et (b_n) sont équivalentes, noté

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n,$$

si $u_n \underset{+\infty}{=} b_n + o(b_n)$, c'est-à-dire s'il existe une suite (ε_n) tendant vers 0 en $+\infty$ telle que pour tout entier naturel n,

$$u_n = b_n(1+\epsilon_n).$$

Proposition 1: Équivalent : Cas particulier

Soient deux suites réelles (u_n) et (b_n) telles que (b_n) ne s'annule pas (ou alors plus à partir d'un certain entier). Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ si et seulement si $\dfrac{u_n}{b_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Méthode 1: Justification de calcul d'équivalent

Pour vérifier que deux suites (qui ne s'annulent plus à partir d'un certain entier) sont équivalentes, il faut et il suffit de vérifier que leur quotient tend vers 1 quand $n \to +\infty$.

Proposition 2: Somme/Différence

Soit (u_n) et (b_n) deux suites réelles telles que $u_n \underset{+\infty}{=} o(b_n)$ alors $u_n + b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$.

Méthode 2: Condition suffisante de calcul d'équivalent dans une somme (finie) de termes

Dans une somme finie de termes de signes variés, on identifie les termes négligeables par rapport à d'autres en $+\infty$. Il suffit de trouver un terme qui domine tous les autres termes pour en déduire l'équivalent le plus synthétique de votre somme.

En pratique, utiliser des équivalents permet de réduire la taille d'une formule et donc d'augmenter sa lisibilité et sa maniabilité. Lorsqu'on calcule un équivalent d'une suite, on perd de l'information, qui est quantifiée par le symbole o.

Proposition 3: Produits/Divisions

Soit $(u_n), (b_n), (a_n), (z_n)$ telles que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n \text{ et } a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} z_n.$$

Alors

- $u_n a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n z_n$
- si b_n et z_n ne s'annulent pas (ou alors plus à partir d'un certain entier), $\dfrac{u_n}{a_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{b_n}{z_n}$.

Méthode 3: Calcul d'équivalent de produits et quotients

Pour trouver l'équivalent d'un produit fini, il suffit de calculer des équivalents synthétiques pour chaque terme et d'en faire le produit. Même chose pour les quotients à condition que le dénominateur soit non nul.

Remarque 1: Plusieurs pièges à éviter

- $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ et $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} z_n$ n'implique pas que $u_n + a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n + z_n$. Par exemple $n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et $-n \underset{n\to+\infty}{\sim} -n$ mais $n+1-n=1$ n'est pas équivalent à $n-n=0$.
- Pour f une fonction quelconque, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ n'implique pas forcément que $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} f(v_n)$. Par exemple, $n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ mais e^{n+1} n'est pas équivalent à e^n puisque le quotient vaut e et ne tend pas vers 1.

Autrement dit, le symbole $\underset{n\to+\infty}{\sim}$ est adapté pour les calculs de produits et quotients d'équivalents. Pour gérer les sommes finies, il vaut mieux prendre du recul, déterminer itérativement un terme dominant synthétique.

Synthèse de cours sur les séries numériques

4 Définitions

Définition 9: Série numérique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. La *série de terme général* u_n est définie de manière équivalente par

— la suite de sommes définie pour tout $N \in \mathbb{N}$ par :

$$S_N := \sum_{n=0}^{N} u_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_N.$$

— la suite de sommes définies par récurrence pour tout $N \in \mathbb{N}$ par

$$S_{N+1} := S_N + u_{N+1} \text{ avec au départ } S_0 = u_0.$$

Pour chaque entier N, le réel S_N s'appelle *la somme partielle* d'ordre N de la série.

Notation : la série de terme général u_n est aussi notée

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n.$$

Définition 10: Série convergente

On dit que la série de terme général u_n est *convergente* si la suite des sommes partielles converge. Si c'est le cas, la limite de la suite des sommes partielles s'appelle la *somme de la série* et on la note :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Ainsi :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n.$$

Quand la suite des sommes partielles n'est pas convergente, on dit que la série *diverge.*

Quand la suite des sommes partielles n'est pas convergente mais tend vers l'infini, on peut écrire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty.$$

Attention : Ne pas confondre les deux notations :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$$

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

La première notation désigne la série de terme général u_n, c'est-à-dire la suite de ses sommes partielles. La seconde notation désigne la *limite* de cette suite.

5 Des premières séries de référence

Théorème 5: Séries géométriques

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$.

Si $|q| < 1$, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Proposition 4: Séries télescopiques

Soit (U_n) une suite réelle. La série de terme général $U_{n+1} - U_n$, c'est-à-dire $\sum_{n\in\mathbb{N}}(U_{n+1}-U_n)$ converge si et seulement si (U_n) converge.

Théorème 6: Série harmonique

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge.

La série harmonique est un exemple de série à termes positifs divergente avec un terme général qui tend vers 0 en l'infini.

6 Série et terme général

Définition 11: Série grossièrement divergente

Une série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est dite **grossièrement divergente** si son terme général u_n ne tend pas vers 0.

Proposition 5:

Une série grossièrement divergente est divergente.

Autrement dit si le terme général (u_n) ne tend pas vers 0 alors la série de terme général u_n diverge.

De manière équivalente, si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, c'est-à-dire que le terme général converge vers 0 .

Remarque 2: $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ $\sum u_n$ **converge**

La série harmonique est un contre-exemple.

Reformulation : Pour qu'une série converge, il faut que son terme général tende vers 0*. Si ce n'est pas le cas, la série diverge. Si c'est le cas, on ne peut rien déduire sur la nature de la série.*

Voici des exemples de séries qui divergent grossièrement puisque leur terme général ne tend pas vers 0 :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} 1, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} n$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\sin(n), \quad \sum_{n\in\mathbb{N}}\cos(n), \quad \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{n}{\ln(n)}$$

7 Modification des termes d'une série

Proposition 6:

Soient (u_n) et (b_n) deux suites numériques. S'il existe un entier n_0 tel que les suites coincident à partir de cet entier :

$$\forall n \geq n_0 \;\; u_n = b_n,$$

alors les deux séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ sont de même nature.

Reformulation : La nature d'une série ne dépend pas des premiers termes de la série. Si on enlève les premiers termes d'une série convergente, la série reste convergente (même chose pour divergente).

En revanche, si les deux séries sont convergentes, leurs sommes $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ ne sont pas toujours égales.

Synthèse de cours sur les séries à termes positifs

8 Comportement des séries à termes positifs

Proposition 7:

Si (u_n) est une suite à termes positifs, alors la série $\sum u_n$ est croissante, c'est-à-dire que la suite $(S_N)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles est croissante.

— si la suite (S_N) est majorée, alors la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est convergente.

— si la suite (S_N) n'est pas majorée, alors elle tend vers l'infini et on peut écrire : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

Ce résultat est une conséquence du fait que si une suite est croissante majorée alors elle converge. Si la suite (u_n)

n'est pas à termes positifs, alors (S_N) n'est plus croissante et même si elle est majorée elle peut diverger. Par exemple, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n$ diverge car sa somme partielle vaut 0 et 1 alternativement donc n'a pas de limite. En revanche elle est bien majorée.

9 Une série de référence supplémentaire

Théorème 7: Séries de Riemann

La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

10 Théorèmes de comparaison

Théorème 8: Comparaison par majoration

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; 0 \leq u_n \leq b_n.$$

Alors :

1. Si $\sum b_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum b_n$ diverge.

Méthode 4: Justification de CV/DV par majoration/-minoration du terme général

On peut démontrer la convergence d'une série à termes positifs en majorant son terme général par le terme général d'une série convergente. On peut montrer la divergence d'une série en minorant son terme général par le terme général d'une série positive divergente.

Remarques

1. En vertu de la proposition 6, il suffit d'avoir la majoration $0 \leq u_n \leq b_n$ pour tout entier n supérieur à un certain n_0 pour avoir la conclusion du théorème.

2. Attention à ne pas oublier l'hypothèse de positivité qui est cruciale. Par exemple, pour tout entier n non nul :

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^2},$$

or la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge mais $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} -\frac{1}{n}$ diverge (c'est l'opposé de la série harmonique).

3. Ne pas faire dire à ce théorème ce qu'il ne dit pas. Si on a :

$$\forall n \in N \;\; 0 \leq u_n \leq b_n$$

et si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ diverge, on ne peut rien en déduire sur la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$.

Par exemple, pour $n > 0$, on a :

$$0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n},$$

or la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

4. On peut remplacer l'hypothèse $u_n \leq b_n$ par

   $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$ et le théorème reste vrai.

Théorème 9: Comparaison par équivalents

Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ deux séries à termes positifs. On suppose que :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n.$$

Alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge ssi $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ converge.

Reformulation : On peut trouver la nature d'une série à termes positifs en calculant un équivalent à son terme général. La nature de la série est alors identique à la nature de la série de termes général équivalent.

Attention ! l'hypothèse de positivité est cruciale : nous verrons au paragraphe suivant des exemples de séries dont les termes généraux sont équivalents mais qui ne sont pas de même nature.

11 Critère de d'Alembert

Théorème 10: de d'Alembert

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique à termes **strictement positifs** telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

Alors :

- Si $l < 1$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.
- Si $l > 1$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge.
- Si $l = 1$, on ne peut rien dire.

Pour le cas $l = 1$, on ne peut rien dire de général : on sait que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n}$ diverge et que, en revanche, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n^2}$ converge, alors que dans les deux exemples, on a : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Remarques

— Le critère de d'Alembert est très pertinent pour étudier des séries dont les termes généraux qui contiennent des expressions de la forme : a^n, $n!$,n^n.

— Attention c'est bien la **limite** de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ qu'il faut étudier et qui doit être < 1 pour assurer la convergence et non pas $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ lui-même. Par exemple, pour $u_n = \frac{1}{n}$, on a, pour tout $n > 1$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} < 1$$

mais la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Synthèse de cours sur les séries à termes quelconques

12 Convergence absolue

Définition 12: Convergence absolue

Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, on dit que la série $\sum u_n$ *converge absolument* si la série $\sum |u_n|$ converge.

Cette notion est particulièrement utile car une série qui converge absolument converge.

Ainsi lorsqu'une série est à termes quelconque, étudier la série des valeurs absolues du terme général permet de retrouver des séries positives et donc de se ramener aux méthodes du chapitre précédent.

Théorème 11: de convergence absolue (admis)

Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, Si $\sum |u_n|$ converge alors $\sum u_n$ converge.

Reformulation : Pour savoir si une série converge, il suffit de regarder si la série des valeurs absolues du terme général converge. Si ce n'est pas le cas, on ne peut rien conclure.

Remarque 3:

• Ainsi la convergence absolue est plus forte que que la convergence puisqu'elle l'entraîne.

• **La réciproque est fausse** : Il existe des séries qui converge mais qui ne convergent pas en valeur absolue. On en verra un exemple dans le paragraphe suivant.

13 Critère des séries alternées

Théorème 12: Critère des séries alternées

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, une suite positive, décroissante et qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ alors $\sum(-1)^n u_n$ converge.

Remarque 4:

$\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est une série qui converge par le critère des séries alternées mais qui ne converge pas absolument puisque $\sum \frac{1}{n}$ diverge.