Licence 2 — Institut Villebon-Charpak, Orsay
Mathématiques — 2025-2026

Équivalents

Code pour les questions

- Sans étoile : Niveau exigible pour tout le monde.
- $\star$: Niveau exigible pour tout le monde mais moins importante.
- $\star\ \star$: Niveau pour aller plus loin (exigible pour ceux qui prétendent aux écoles gei)
- En violet : question menant à un théorème, proposition qu'on peut trouver dans le bilan de cours. Peut être passé en cas de retard mais nécessaire pour comprendre en profondeur.

Le contenu du cours

Ce cours traite de la notion d'équivalents de suite au voisinage de $+\infty$. Cette notion jouera un rôle important dans l'étude des séries numériques qui constituera un gros morceau de l'UE.
Rappelons d'abord les notions de négligeabilités et dominations pour des paires de suites.

Définition 1: Négligeabilité, domination

- On dit que la suite (u_n) est **négligeable** en $+\infty$ devant une suite (b_n) (qui ne s'annule plus à partir d'un certain rang),

$$u_n \underset{+\infty}{=} o(b_n) \quad \text{(qui s'écrit aussi)} \quad u_n \underset{+\infty}{\ll} b_n$$

si $\dfrac{u_n}{b_n} \to 0$ lorque n tend vers $+\infty$.

- On dit aussi que la suite (b_n) (qui ne s'annule plus à partir d'un certain rang), **domine** en $+\infty$ la suite (u_n).

Si on est sûr de dominer en $+\infty$ (et pas $-\infty$), on peut omettre d'écrire $+\infty$ en dessous des $\ll$ et des égalités.
La proposition qui suit rappelle des croissances comparées qui vous seront utiles pour calculer certains équivalents de suites.

Proposition 1: Croissances comparées à retenir

Soit $k \in \mathbb{R}_+^\star$, $a > 1$

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n^k} = 0$. (qui s'écrit aussi $\ln(n) \underset{+\infty}{=} o(n^k)$, ou encore $\ln(n)$ est négligeable devant n^k en $+\infty$).

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0$, qui s'écrit aussi $n^k \underset{+\infty}{=} o(a^n)$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$, qui s'écrit aussi $a^n \underset{+\infty}{=} o(n!)$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$, qui s'écrit aussi $n! \underset{+\infty}{=} o(n^n)$.

▸ **Exercice 1**. **Termes dominants, termes négligeables dans une somme (ou une différence)**

1. Trouvez des suites qui sont négligeables devant $(n)_{n\in\mathbb{N}}$, devant (1), devant $(\frac{1}{n^2})_{n\geq 1}$.
2. Trouvez des suites qui dominent $(n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis (1), puis $(\frac{1}{n^2})_{n\geq 1}$.
3. Marquer (en soulignant ou surlignant ou entourant) les termes dominants dans les sommes ci-dessous, qui sont définies pour tout $n \geq 1$. Justifier (on pourra encadrer certain termes et appliquer un théorème du sandwich).

$$n+\frac{1}{n}, \quad n^2+n, \quad 2^n-n^2, \quad 2^n+\ln(n)+n, \quad n!-2^n, \quad n+(-1)^n,$$
$$-2n+\sqrt{n}, \quad n^3+(-1)^n-n^2\sin(n), \quad n^2+2-e^n, \quad 2\sqrt{n}-1, \quad \sqrt{n}+\sin(n)$$

▸ **Exercice 2**. $\star$ Ne pas croire que ...
Y-a-t-il un terme dominant dans les sommes suivantes ?

$$(n+1)!-n!, \quad 3^{n+2}-3^n, \quad \sin(n)-1, \quad \star\star(-1)^n n^2+3n^2.$$

Définition 2: Équivalents

On dit que deux suites réelles (u_n) et (b_n) sont **équivalentes** en $+\infty$, noté

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$$

s'il existe une suite (ϵ_n) tendant vers 0 en $+\infty$ telle que pour tout entier naturel n (pour lequel les deux suites sont définies),

$$u_n = b_n(1+\epsilon_n).$$

De manière équivalente, pour éviter d'expliciter la suite (ϵ_n), on écrit parfois

$$u_n \underset{+\infty}{=} b_n + o(b_n).$$

Si on est sûr de calculer l'équivalent en $+\infty$ (et pas $-\infty$), on peut ne pas écrire $+\infty$ en dessous de l'égalité.

▸ **Exercice 3**. Étant donné une suite u_n et une autre suite a_n négligeable devant u_n (la limite de $\dfrac{a_n}{u_n}$ tend vers 0 quand $n \longrightarrow +\infty$), peut-on trouver un équivalent de $u_n + a_n$?

▸ **Exercice 4**. **D'abord les sommes ou les différences**

1. Trouvez des suites qui sont équivalentes à $(n)_{n\in\mathbb{N}}$, à (1), à $(\frac{1}{n^2})_{n\geq 1}$.

2. Déterminez des équivalents de $n+1+\dfrac{1}{n}$. Déterminez-en ensuite l'équivalent le plus synthétique. Même question pour $2n^2-\ln(n)+12$ et $n^3+4e^n+\ln(n)-2$.

3. **Entraînez-vous !** Déterminez l'équivalent en l'infini le plus synthétique des expressions données dans l'Exercice 1.

Nous vous donnons maintenant un outil qui permettra de justifier la plupart de vos calculs d'équivalents. Ce n'est pas une définition, c'est une condition suffisante pour que deux suites soient équivalentes (en l'infini).

***Méthode 1:* Cas particulier**

Si (u_n) et (b_n) **ne s'annulent plus à partir d'un certain rang** et que

$$\frac{u_n}{b_n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1.$$

Alors $u_n=b_n+o(b_n)$, c'est-à-dire que (u_n) et (b_n) sont équivalentes.

▸ **Exercice 5**. ⋆ Calculer l'équivalent le plus synthétique pour les suites définies pour tout $n\geq 1$ ci-dessous.

$$\sqrt{n+1},\quad \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},\quad 2^{n+1}-2^n,\quad \ln(n+1)-\ln(n),\quad \sqrt{n+1}-\sqrt{n}.$$

Indications : on pourra écrire certaines expressions sous forme de fraction, factoriser, utiliser les propriétés du logarithme etc...

▸ **Exercice 6**. **Produits, divisions**

1. On suppose que $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}b_n$ et $a_n\underset{n\to+\infty}{\sim}z_n$. A votre avis peut-on dire que :

   (a) $u_na_n\underset{n\to+\infty}{\sim}b_nz_n$?

   (b) $\dfrac{u_n}{a_n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{b_n}{z_n}$?

   (c) $u_n+a_n\underset{n\to+\infty}{\sim}b_n+z_n$?

2. Justifier soit par une preuve, soit par un contre-exemple.

3. Déterminez l'équivalent le plus simple de $\dfrac{3n^2+\ln(n)}{-e^n+n+1}$ en exploitant la question 1.

4. **Entraînez-vous!** Déterminez l'équivalent le plus synthétique des expressions suivantes :

$$\big(n+(-1)^n\big)\big(-2n+\sqrt{n}\big),\quad \frac{n^3+6}{2^n-n},\quad \frac{n+6}{2n-(-1)^n},\quad \frac{1}{n+\ln(n)},\quad \frac{n^3+(-1)^n-\sin(n)}{n^2+2-e^n}.$$

▸ **Exercice 7**. ⋆ ⋆ Ne pas croire que ...

1. On suppose que $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}b_n$, peut-on dire que :

(a) $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{b_n}$?

(b) $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(b_n)$?

(c) $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} f(b_n)$ pour f une fonction quelconque?

2. Justifier soit par un contre-exemple, soit par une preuve.

3. Calculer l'équivalent le plus synthétique pour les suites suivantes.

$$\frac{\sin(n+1/n)}{2\sqrt{n}-1}, \quad \exp(n+1), \quad \ln(\sqrt{n}+\sin(n))$$

Séries numériques : une nouvelle façon de définir une suite

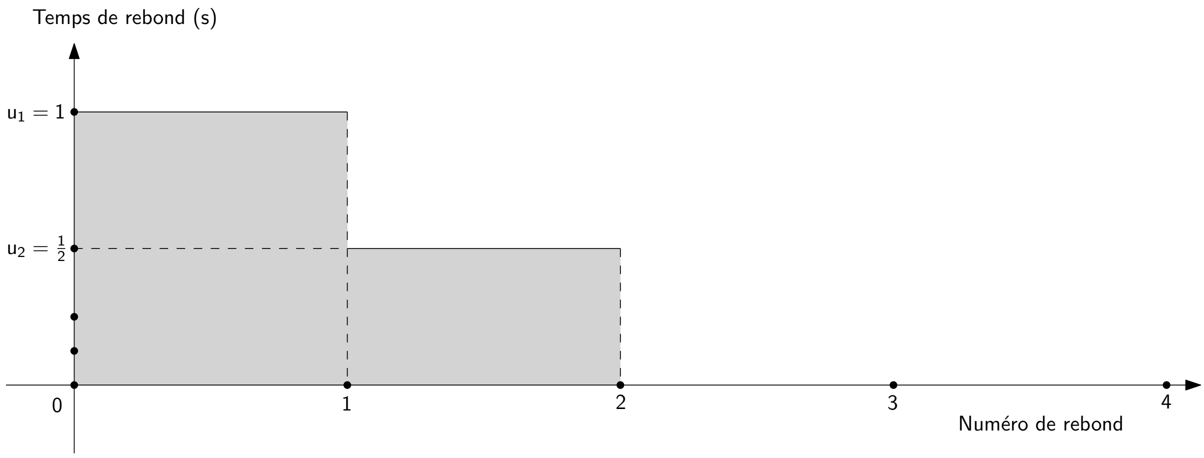
Code pour les questions

- Sans étoile : Niveau exigible pour tout le monde.
- ⋆ : Niveau exigible pour tout le monde mais moins importante.
- ⋆ ⋆ : Niveau pour aller plus loin (exigible pour ceux qui prétendent aux écoles gei)
- G : Interprétation ou lecture graphique à la clé.
- En violet : question menant à un théorème, proposition qu'on peut trouver dans le bilan de cours. Peut être passé en cas de retard mais nécessaire pour comprendre en profondeur.

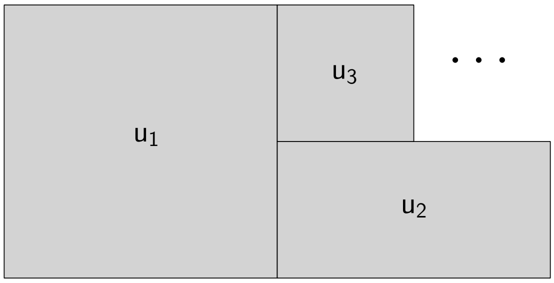
Le Contenu du cours

Dans ce paragraphe, nous allons découvrir une nouvelle façon de définir une suite.

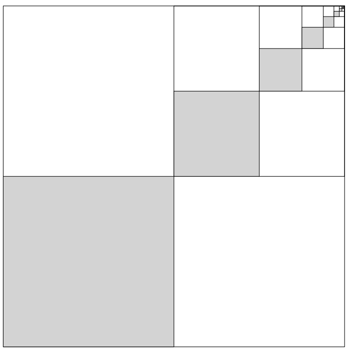
▸ **Exercice 8.** ⋆ G Rebonds -réadapté du problème d'Achille et la tortue ou paradoxe de Zénon
Une balle de ping-pong rebondit mais ses rebonds s'amortissent. Il s'est écoulé une seconde entre le premier et le deuxième rebond, puis l'intervalle de temps entre deux rebonds successifs est, à chaque rebond, divisé par deux. La balle va-t-elle rebondir jusqu'à la fin des temps ou y aura-t-il un moment où elle ne rebondira plus ?
On pourra noter u_n l'intervalle de temps écoulé entre le n-ième et le $(n+1)$-ième rebond. Alternativement, on pourra compléter le graphique ci-dessous où chaque temps de rebond correspond à un rectangle.

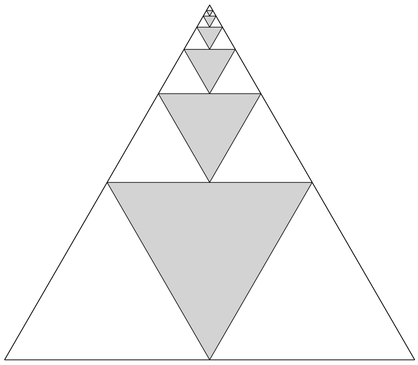


Ensuite, on réarrangera les rectangles en complétant le diagramme ci-dessous.



▸ **Exercice 9**. ⋆ G Carreaux imbriqués - tiré de la Problémathèque CSEN
Les figures ci-dessous représentent des dessins éphémères au sol d'une cour. Les parties blanches-grises-blanches ont été coloriées de manière itératives, couches par couches. Dans la vie réelle, les deux dessins sont chacun d'aire 1m^2. Quelle est l'aire totale de la partie grise $\mathcal{A}$ dans chaque dessin (en m^2) ? À partir de la construction couche par couche, compléter la formule $\mathcal{A} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum \dots \text{m}^2$.





▸ **Exercice 10**. ⋆ G Modèle de crochet hyperbolique par Daina Taimina (Université de Cornell)
Voici la construction de tissus "hyperbolique" conçu par une enseignante-chercheuse pour ses recherches et pour un cours aux enseignant-es du 2nd cycle. Avec un crochet et une pelote de laine, on crochète le premier rang avec 5 mailles. Au second rang (je vous épargne les détails techniques pour rajouter un rang), on crochète sur chaque maille du premier rang, 2 mailles. C'est-à-dire que chaque maille "parent" du 1er rang a généré 2 mailles "enfants" au 2nd rang. Au troisième rang, on réitère, on fait en sorte que chaque parent du rang 2 génère 2 enfants au troisième rang. Et ainsi de suite. On s'arrête au 10ème rang puisque c'est la fin de l'heure.
Combien de mailles a-t-on généré au rang 2, au rang 3, au rang 10 ? Combien de mailles au total l'ouvrage comprend-t-il ? Peut-on continuer le processus avec une quantité finie de laine ?

Définition 3: Série numérique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.

- La **série de terme général** u_n, correspond à la suite de sommes définies pour tout $N \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{aligned} S_N &:= \sum_{n=0}^{N} u_n \\ &= u_0 + u_1 + \dots + u_N. \end{aligned}$$

- De manière équivalente, la série de terme général u_n est la suite de sommes définie par récurrence pour tout entier $N \geq 0$ par

$$S_{N+1} = S_N + u_{N+1} \text{ avec au départ } S_0 = u_0.$$

- Pour tout entier $N \geq 0$, le réel $\sum_{n=0}^{N} u_n$ est la **somme partielle d'ordre** N de la série.

Notation : la série de terme général u_n est aussi notée $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$.

Pour simplifier, on a supposé que le terme général de la série est défini pour tout entier naturel. En pratique, le terme général est donné par une fonction, qui parfois n'est pas définie en 0 ou 1 etc... Dans ce cas, le terme général est défini à partir d'un certain entier ≥ 1 et la série est définie et initialisée à partir de ce même entier.

▸ **Exercice 11**. Calcul de sommes

1. Pour tout entier $N \geq 0$ calculer

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} 5^n; \quad U_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{3^n}; \quad R_N = \sum_{n=0}^{N} 1.$$

2. ⋆ Étudier dans un premier temps la suite numérique $\big((-1)^n\big)_{n \in \mathbb{N}}$, puis calculer pour tout entier $N \geq 0$ (éventuellement en faisant une disjonction de cas) $Q_N = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n$.

3. Calculer pour tout entier $N \geq 1$

$$P_N = \sum_{n=1}^{N} \Big(\ln(n) - \ln(n+1)\Big); \quad T_N = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2}\right);$$

$$\star\star V_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}.$$

Indication pour V_N : se rappeler l'égalité remarquable (à compléter) : $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\dots}$.

4. Parmi les suites de sommes ci-dessus, lesquelles convergent ? Pouvez-vous calculer leur limite ?

Définition 4: Série convergente, somme d'une série convergente

On dit que la série de terme général u_n est **convergente** si la suite de ses sommes partielles converge. Si c'est le cas, la limite de la suite des sommes partielle s'appelle la **somme de la série** et on la note

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Ainsi :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n.$$

Quand la suite (S_n) n'est pas convergente, on dit que la série **diverge**.
Quand la suite (S_n) diverge mais tend vers l'infini, on peut écrire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty.$$

Attention : Ne pas confondre les deux notations : $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
La première notation désigne la série de terme général u_n, c'est-à-dire la suite de ses sommes partielles. La seconde notation désigne la **limite** des sommes partielles.

▸ **Exercice 12**. *Retour sur l'exercice 11.*

1. Dans l'exercice 11, quel est le point commun entre les séries définies par les suites (S_n), (Q_n) et (U_n) ? Quel énoncé de votre résumé de cours s'applique dans ces trois cas ?
2. Dans l'exercice 11, quel est le point commun entre les séries définies par les suites (T_n), (P_n) et (V_n) (enlevez (V_n) si vous ne l'avez pas traitée)? Quel énoncé de votre résumé de cours s'applique dans ces trois cas ?

▸ **Exercice 13**. *Divergence grossière.*
Dans cet exercice, on cherche à étudier les liens entre la convergence d'une suite (u_n) et celle de la série de terme général u_n.

1. Revenir sur les six exemples de l'exercice 11 : dans le tableau suivant, indiquez pour chacun des exemples la nature de la série et la nature de son terme général.

	Terme général u_n	CV ou DV du terme général	Nature de la série $\sum u_n$ (CV ou DV)
S_N			
R_N			
Q_N			
T_N			
U_N			
P_N			

2. Pour les exemples précédents, que peut-on dire de la suite (u_n) quand la série correspondante est convergente ?
3. *Cas général.*
   (a) Soit (X_n) une suite numérique qui converge vers un réel l. Que peut-on dire de la suite des différences consécutives $(X_{n+1} - X_n)$?
   (b) Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série numérique. On note, pour chaque entier N :

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n.$$

On suppose que cette série est convergente. En appliquant la question préliminaire à la suite (S_N), que peut-on dire de la suite (u_n) ?

(c) On suppose que la suite (u_n) tend vers 0. Peut-on en conclure que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est convergente (par exemple en parcourant les différents exemples donnés dans des exercices précédents)?

(d) Quel est le lien logique entre les deux affirmations suivantes ?

- La série $\sum u_n$ est convergente ;
- Le terme général (u_n) de la série tend vers 0.

Définition 5: Série grossièrement divergente

Une série numérique $\sum u_n$ est dite **grossièrement divergente** si son terme général u_n ne tend pas vers 0.

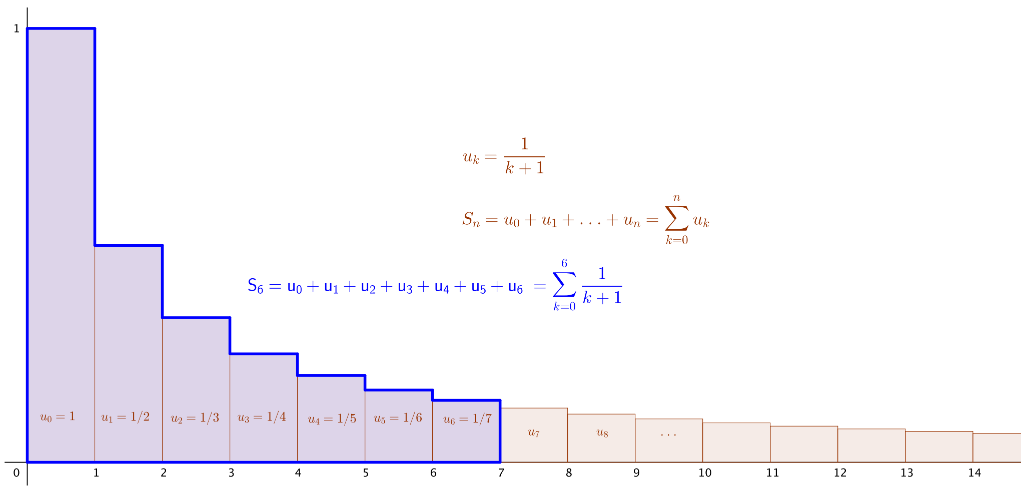
▸ **Exercice 14. La série harmonique** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{1}{n}.$$

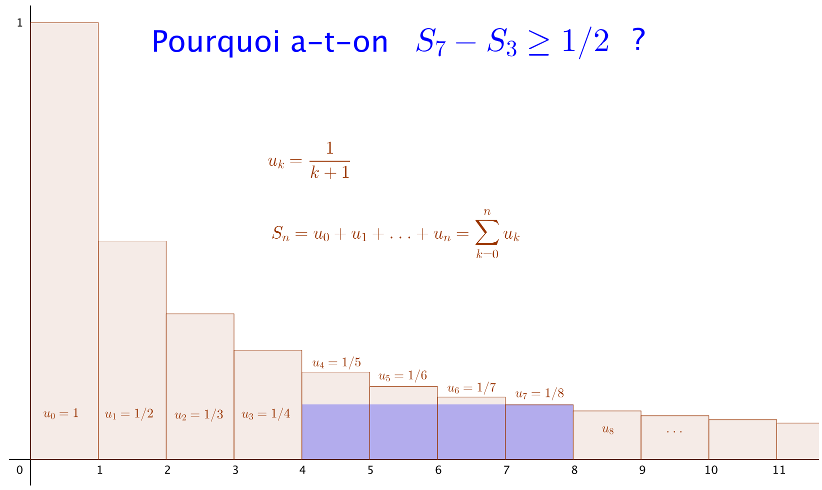
L'objet de l'exercice est d'étudier la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ dont les sommes partielles sont définies pour tout $n \geq 1$ par :

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

1. ⋆ Pensez-vous que la (S_n) est convergente, divergente ? Vous pourrez étudier le graphique ci-dessous.



2. ⋆G Démontrer, pour tout entier $n \geq 1$, la minoration $S_{2n+1} - S_n \geq 1/2$.



3. ⋆ Éventuellement en admettant les résultats des questions précédentes, pensez-vous que la série $\sum u_n$ converge ? Justifiez.

4. Quel(s) résultat(s) de la synthèse de cours la question 14 démontre-t-elle? Apprenez ce(s) résultat(s) et appelez un-e enseignant-e pour faire un bilan de cette partie.

▸ **Exercice 15**. *Que se passe-t-il quand on modifie quelques termes d'une série ?*

1. ⋆ On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :
$$u_n = 2^{-n}.$$
Étudier la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ puis, si elle est convergente, calculer sa somme.

2. ⋆ On considère maintenant la suite (b_n) définie par :
$$b_n = 1 \text{ si } n \leq 10 \ \text{ et } b_n = 2^{-n} \text{ si } n > 10.$$
Étudier la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ puis, si elle est convergente, calculer sa somme.

3. ⋆ Pouvez-vous imaginer une propriété générale qui présente ce qui se passe quand on modifie les premiers termes d'une série ? Démontrer cette propriété.

Nous avons vu dans les exercices de ce paragraphe trois *séries de référence* :

- La série harmonique ;
- Les séries géométriques (à vous de préciser de quoi il s'agit);
- Les séries télescopiques (à vous de préciser de quoi il s'agit).

Vous devez pouvoir dire dans chacun des cas, si

- la série converge.
- la série diverge grossièrement (i.e. le terme général ne converge pas vers 0).
- la série diverge alors que son terme général converge vers 0.