Mathématiques, évaluation 3
(calculatrice interdite), 2 pages, 1h30.

Instructions de rédaction : Justifier avec précision vos calculs d'intégrales, d'équivalents et vos majorations/minorations.
Les 4 questions marquées ♠ sont facultatives. Les 10 autres questions valent 20 points en tout.

Exercice 1 On considère la série $\sum_{n\geq 2} a_n$ dans chacun des 6 cas énumérés ci-dessous.

— Indiquer (sans le justifier) si la série est à *termes positifs* ;

— Déterminer sa nature (*convergente, divergente*). Justifier soigneusement.

1. $a_n = \dfrac{n^2}{4n^5+3n-1}$.
2. $a_n = \dfrac{n^2}{(\ln n)^2}$.
3. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n\ln n}$.
4. $a_n = \dfrac{5^n}{(n+1)!+\sin n}$.
5. $a_n = \dfrac{\ln n}{n^2+1}$.
6. $a_n = \dfrac{n\cos n}{n^3+\ln n}$.

Exercice 2

1. Calculer, pour chaque réel $c > 0$, l'intégrale :
$$I_c = \int_0^c xe^{-x}\,\mathrm{d}x.$$
L'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x$ est-elle convergente ? Si oui, donner sa valeur.
2. Calculer, pour chaque réel $c > 1$, l'intégrale :
$$I_c = \int_1^c \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x.$$
L'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$ est-elle convergente ? Si oui, donner sa valeur.

Exercice 3 Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, on note :
$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

1. Donner (sans justifier) la série dont S_n est une somme partielle. Cette série est-elle absolument convergente ? convergente ? Justifier.

2. ♠ Démontrer que pour tout $n \geq 0$:

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k \right) \, \mathrm{d}x = S_n.$$

3. ♠ En déduire que pour tout $n \geq 0$:

$$S_n = \int_0^1 \frac{1-(-x)^n}{1+x} \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} - \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x} \, \mathrm{d}x.$$

4. ♠ Démontrer que pour tout $n \geq 0$:

$$0 \leq \left| \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x} \, \mathrm{d}x \right| \leq \int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}.$$

   Indication : on pourra utiliser la majoration suivante pour toute fonction continue f définie sur $[0,1]$ et à valeurs réelles, $\left| \int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x \right| \leq \int_0^1 |f(x)| \, \mathrm{d}x$.

5. ♠ En déduire que :

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x}.$$

6. En vous aidant des résultats des questions précédentes, calculer la somme suivante :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$