

Mathématiques, évaluation 3

(calculatrice interdite), 2 pages, 1h30.

Instructions de rédaction : Justifier avec précision vos calculs d'intégrales, d'équivalents et vos majorations/minorations.

Les 4 questions marquées ♠ sont facultatives. Les 10 autres questions valent 20 points en tout.

Exercice 1 On considère la série $\sum_{n \geq 2} a_n$ dans chacun des 6 cas énumérés ci-dessous.

- Indiquer (sans le justifier) si la série est à *termes positifs* ;
- Déterminer sa nature (*convergente, divergente*). Justifier soigneusement.

$$1. a_n = \frac{n^2}{4n^5 + 3n - 1}.$$

$$4. a_n = \frac{5^n}{(n+1)! + \sin n}.$$

$$2. a_n = \frac{n^2}{(\ln n)^2}.$$

$$5. a_n = \frac{\ln n}{n^2 + 1}.$$

$$3. a_n = \frac{(-1)^n}{n \ln n}.$$

$$6. a_n = \frac{n \cos n}{n^3 + \ln n}.$$

Exercice 2

1. Calculer, pour chaque réel $c > 0$, l'intégrale :

$$I_c = \int_0^c x e^{-x} dx.$$

L'intégrale $I = \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$ est-elle convergente ? Si oui, donner sa valeur.

2. Calculer, pour chaque réel $c > 1$, l'intégrale :

$$I_c = \int_1^c \frac{\ln x}{x} dx.$$

L'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ est-elle convergente ? Si oui, donner sa valeur.

Exercice 3 Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

1. Donner (sans justifier) la série dont S_n est une somme partielle. Cette série est-elle absolument convergente? convergente? Justifier.
2. ♠ Démontrer que pour tout $n \geq 0$:

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k \right) dx = S_n.$$

3. ♠ En déduire que pour tout $n \geq 0$:

$$S_n = \int_0^1 \frac{1 - (-x)^n}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} - \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x} dx.$$

4. ♠ Démontrer que pour tout $n \geq 0$:

$$0 \leq \left| \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x} dx \right| \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

Indication : on pourra utiliser la majoration suivante pour toute fonction continue f définie sur $[0, 1]$ et à valeurs réelles, $|\int_0^1 f(x) dx| \leq \int_0^1 |f(x)| dx$.

5. ♠ En déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}.$$

6. En vous aidant des résultats des questions précédentes, calculer la somme suivante :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$