Mathématiques, évaluation 2
(calculatrice autorisée), 2 pages, 1h30.

Instructions de rédaction : Détailler suffisamment les arguments. Simplifier au maximum les fractions, écrire $\frac{2}{3}$ au lieu de $\frac{2}{4-1}$ ou $\frac{4}{6}$.
Les 4 questions ♠ sont bonus. Répondre correctement à 10 questions vous assurera une note maximale.

Exercice 1

1. Pour chaque entier $N \in \mathbb{N}$, calculer $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{3^n}{e^n}$.
2. La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{3^n}{e^n}$ est-elle convergente ?

Exercice 2

Le but de cet exercice est de retrouver un résultat du cours sur $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

1. Comment s'appelle cette série ? Quelle est sa nature ?
2. Soit $n \geq 2$.
   (a) Montrer que $\dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{1}{n(n-1)}$.
   (b) Vérifier que $\dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$.
3. Prouver que la suite $(S_N)_{N\geq 1}$ définie par $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$ est majorée et en déduire le résultat du cours.

Exercice 3

On considère la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} a_n$ dans chacun des 6 cas énumérés ci-dessous.

— Indiquer si la série est à *termes positifs* ;
— Déterminer sa nature (*absolument convergente, convergente, grossièrement divergente, divergente*). Justifier soigneusement.

1. $a_n = \dfrac{(\sin n)^2}{n^2}$.
2. $a_n = \dfrac{n^2+2n-2}{2n^3-1}$.
3. $a_n = \dfrac{n \cdot 2^n}{n!+1}$.
4. $a_n = \dfrac{1+2\cos(n)}{n^3+\sin n}$.

5. ($\spadesuit$) $a_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$.

6. ($\spadesuit$) $a_n = \dfrac{(-1)^n \ln n}{n\sqrt{n}}$.

Problème On considère les séries de la forme $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{a_k}{10^k}$ où $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres entiers, tous compris entre 0 et 9, c'est-à-dire que $a_k \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

0. Démontrer qu'une telle série $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{a_k}{10^k}$ est convergente.

Les deux premières questions sont dédiées au calcul de la somme d'une telle série lorsque la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est donnée. Dans la dernière question, on vous demande de partir d'un nombre et de proposer la suite correspondante.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3}{10^k}$.
2. ($\spadesuit$) On considère la suite $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $b_k = 2$ si k est pair et $b_k = 3$ si k est impair.
   (a) On note : $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{10^k}$.
   Expliquer pourquoi, si $n \geq 2$, on a :
   $$B_n = \frac{2}{1} + \frac{3}{10} + \frac{1}{100} B_{n-2}.$$
   (b) En faisant tendre n vers l'infini, calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b_k}{10^k}$.
   (c) À l'aide d'une calculatrice, donner une valeur approchée de la somme obtenue à la question précédente. Que remarquez-vous ?
3. ($\spadesuit$) Utiliser une calculatrice pour calculer les premières décimales du nombre $\frac{20}{11}$.
   Pour quelle suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ a-t-on $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k} = \frac{20}{11}$? Prouver votre conjecture.