

Mathématiques, évaluation 2

(calculatrice autorisée), 2 pages, 1h30.

Instructions de rédaction : Détailler suffisamment les arguments. Simplifier au maximum les fractions, écrire $\frac{2}{3}$ au lieu de $\frac{2}{4-1}$ ou $\frac{4}{6}$.

Les 4 questions ♠ sont bonus. Répondre correctement à 10 questions vous assurera une note maximale.

Exercice 1

1. Pour chaque entier $N \in \mathbb{N}$, calculer $S_N = \sum_{n=0}^N \frac{3^n}{e^n}$.
2. La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{3^n}{e^n}$ est-elle convergente ?

Exercice 2 Le but de cet exercice est de retrouver le résultat du cours sur $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$.

1. Comment s'appelle cette série ? Quelle est sa nature ?
2. Soit $n \geq 2$.

(a) Montrer que $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$.

(b) Vérifier que $\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.

3. Prouver que la suite $(S_N)_{N \geq 1}$ définie par $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}$ est majorée et en déduire le résultat du cours.

Exercice 3 On considère la série $\sum_{n \geq 2} a_n$ dans chacun des 6 cas énumérés ci-dessous.

- Indiquer si la série est à *termes positifs* ;
- Déterminer sa nature (*absolument convergente, convergente, grossièrement divergente, divergente*). Justifier soigneusement.

1. $a_n = \frac{(\sin n)^2}{n^2}$.

3. $a_n = \frac{n \cdot 2^n}{n! + 1}$.

2. $a_n = \frac{n^2 + 2n - 2}{2n^3 - 1}$.

4. $a_n = \frac{1 + 2 \cos(n)}{n^3 + \sin n}$.

$$5. (\spadesuit) a_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}.$$

$$6. (\spadesuit) a_n = \frac{(-1)^n \ln n}{n\sqrt{n}}.$$

Problème On considère les séries de la forme $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{a_k}{10^k}$ où $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres entiers, tous compris entre 0 et 9, c'est-à-dire que $a_k \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

0. Démontrer qu'une telle série $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{a_k}{10^k}$ est convergente.

Les deux premières questions sont dédiées au calcul de la somme d'une telle série lorsque la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est donnée. Dans la dernière question, on vous demande de partir d'un nombre et de proposer la suite correspondante.

1. Calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3}{10^k}$.

2. ((b_k)_{k \in \mathbb{N}} définie par $b_k = 2$ si k est pair et $b_k = 3$ si k est impair.

(a) On note : $B_n = \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{10^k}$.

Expliquer pourquoi, si $n \geq 2$, on a :

$$B_n = \frac{2}{1} + \frac{3}{10} + \frac{1}{100} B_{n-2}.$$

(b) En faisant tendre n vers l'infini, calculer la valeur de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b_k}{10^k}$.

(c) À l'aide d'une calculatrice, donner une valeur approchée de la somme obtenue à la question précédente. Que remarquez-vous ?

3. (\frac{20}{11}. Pour quelle suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ a-t-on $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k} = \frac{20}{11}$? Prouver votre conjecture.