Mathématiques, évaluation 1

Exercice 1 Donner un équivalent le plus simple possible en $+\infty$ pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans chacun des cas suivants :

$(a)\quad u_n = n^2 - n + 2;$

$(b)\quad u_n = \dfrac{n^3 + \ln n + 1}{2e^n + n^4 - 2}$

$(c)\quad u_n = (\ln n + \sin n)\left(n + \dfrac{1}{n}\right)$

$(d)\quad u_n = \sqrt{n^2+1}$

Exercice 2

1. Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ dans chacun des cas suivants :

$(a)\quad u_k = 3;$

$(b)\quad u_k = 3^k$

$(c)\quad u_k = \dfrac{1}{\pi^k}$

$(d)\quad u_k = e^{-n} - e^{-n-1}$

2. Dans chacun des cas précédents, dire si la série $\sum u_k$ est convergente et, si elle l'est, donner la valeur de $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Exercice 3

1. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{\pi^n + 4}$ est-elle convergente ? Justifiez votre réponse.

2. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)$ est-elle convergente ? Justifiez votre réponse.

3. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{\ln n}{n}$ est-elle convergente ? Justifiez votre réponse.

Exercice 4 On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et l'on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

1. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle toujours croissante ? Justifiez votre réponse.

2. Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle toujours croissante ? Justifiez votre réponse.