L1S1 PCST — Orsay jan 2026

Calculus — **Durée 2h**

Documents et téléphones sont interdits. Une calculatrice type collège est permise.
Il est important de justifier vos réponses !

Exercice 1 - (4 pts) Simplifier autant que possible (i est l'unité imaginaire) :

(**a**) $\dfrac{\sqrt{20\times 6}}{\sqrt{12}\times\sqrt{15}}$, (**b**) $\dfrac{4a^2-b^2}{b+2a}$, (**c**) $\left(e^{i\pi/2}\right)^3$, (**d**) $\dfrac{\exp(a+\ln(2))}{\exp(\ln(4)-a)}$.

[**1 pt**] (**a**) Par ex : ..calcul.. $= \sqrt{\dfrac{120}{180}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ (ou $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$)

[**1 pt**] (**b**) Par ex : ... $= \dfrac{(2a+b)(2a-b)}{2a+b} = 2a-b$

[**1 pt**] (**c**) Par ex avec Euler, on trouve $e^{i\pi/2}=i$, donc ... $= (\ i\ )^3 = i^2 i = -i$

[**1 pt**] (**d**) Par ex : .. $= \dfrac{e^a e^{\ln 2}}{e^{\ln 4}e^{-a}} = \dfrac{e^a\times 2}{4\times e^{-a}} = \dfrac{1}{2}e^{2a}$

Chaque point vaudra **0,25 pt** si le résultat est correct mais sans aucune justification raisonable.

Exercice 2 - (4 pts) Soit $f(x) = x^2e^{-x/2}$, $x\in\mathbb{R}$.

1. Déterminer les limites et valeurs extremaux de f et dresser un tableau de variation.
2. Déterminer l'équation de la tangente T du graphe de f en $(2, f(2))$.
3. Déterminer le point d'intersection entre cette tangente T et l'axe des abscisses.

1. [**2 pts**]
   — Par croissances comparé $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
   — Par calcul direct $\lim_{x\to-\infty} f(x) = (+\infty)\times(+\infty) = +\infty$.
   — Dérivée de f : $f'(x) = (2x-\dfrac{x^2}{2})e^{-x/2}$ et $f'(x)=0$ ssi $x=0$ ou $x=4$.
   — TdV. $f : \left]-\infty; 0; 4; +\infty\right[\to \left\{ +\infty \searrow 0 \nearrow 16e^{-2} \searrow 0 \right\}$.
2. [**1 pt**] $y = f'(2)(x-2)+f(2) = (4-2)(x-2)e^{-1}+4e^{-1} = 2xe^{-1}$.
3. [**1 pt**] Il faut résoudre $y = 2xe^{-1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Le point d'intersection est donc l'origine $(0; 0)$.

Exercice 3 - (2 pts) On considère l'équation différentielle : $y'(t) = 1+\cos(\omega t)$, $t\in\mathbb{R}$ et $\omega > 0$.

1. La fonction $\cos(\omega t)$ est périodique en $t\in\mathbb{R}$, mais avec quelle période ?
2. Déterminer la solution générale à l'équation différentielle.
3. Déterminer la solution particulière avec la condition initiale : $y(0) = 3$.

1. [**0,5 pt**] $\cos(x)$ est 2π-périodique est $\cos(\omega t)$ est donc $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ périodique.
2. [**1 pt**] Sol gén : $y(t) = \displaystyle\int y'(t)\,dt = C + t + \frac{1}{\omega}\sin(\omega t)$, $t\in\mathbb{R}$ avec $C\in\mathbb{R}$ une constante.
3. [**0,5 pt**] $y(0) = C+0 = 3$ donne $C = 3$ et donc $y(t) = 3+t+\dfrac{1}{\omega}\sin(\omega t)$.

Exercice 4 - (3 pt) On considère l'équation différentielle : $y'(t) + y(t) = t$

1. Déterminer la solution générale.
   Indication :On pourra d'abord chercher une solution particulière.
2. Déterminer la solution de l'équation différentielle avec la condition initiale : $y(1) = 1$.

   1. [**2 pt**] On cherche une solution particulière sous la forme $y_1(t) = at + b$ et trouve $y(t) = t - 1$
      Solution homogène Ce^{-t}, donc Sol gén : $y(t) = t - 1 + Ce^{-t}$
   2. [**1 pt**] Faut que $y(1) = 1 - 1 + Ce^{-1} = 1$, d'où $C = e$ et $y(t) = t - 1 + e^{1-t}$.

Exercice 5 - (3 pts) Calculer les limites : (**a**) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{\ln\left(1 + x\sqrt{2}\right)}$, (**b**) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(\pi x)}{\sin^2(2x)}$.

[**1,5 pt**] (a) Par ex avec équivalents en zéro $\ln(1 + x\sqrt{2}) \sim x\sqrt{2}$ et ... $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{x\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

[**1,5 pt**] (b) $1 - \cos(\pi x) \sim 1 - (1 - \frac{(\pi x)^2}{2!} = \frac{\pi^2}{2}x^2$, $\sin^2(2x) \sim (2x)^2 = 4x^2$ et $\frac{1-\cos(\pi x)}{\sin^2(2x)} \sim \frac{\pi^2 x^2/2}{4x^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Exercice 6 - (2 pts) Soit D la droite passant par $Q(2;3)$ et normale au vecteur $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

1. Donner une équation cartésienne pour D.
2. Calculer la distance entre D et l'origine $\mathcal{O}(0;0)$.

   1. [**1 pt**] $M(x,y) \in D$ ssi $\overrightarrow{n} \cdot \vec{QM} = 0$ ssi $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} x-2 \\ x-3 \end{pmatrix} = (x-2) + 3(y-3) = 0$.
      Donc $x + 3y - 11 = 0$ (ou proportionnel avec).
   2. [**1 pt**] Par ex avec formule du cours et $(x_0, y_0) = (0,0)$ et $(a,b,c) = (1;3;-11)$:

$$d(D, \mathcal{O}) = \frac{|\ a \times x_0 + b \times y_0 + c\ |}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|0 + 0 - 11|}{\sqrt{10}} = \frac{11}{\sqrt{10}}.$$

Exercice 7 - (2 pts) Soit C le cercle d'équation $x^2 - 4x + y^2 = 0$. Déterminer le centre et le rayon de C.

[**2 pts**] L'équation cartésienne d'un cercle de centre (a,b) et rayon $r > 0$ est :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2ax + y^2 - 2by + b^2 = r^2$$

ou bien

$$x^2 - 2ax + y^2 - 2by \quad = \quad r^2 - a^2 - b^2.$$

En comparant avec l'équation donnée on trouve $a = 2$ et $b = 0$ (1pt)

et ensuite pour r : $r^2 - 2^2 - 0 = 0$ donc $r^2 = 2^2$ ou $r = 2$ (doit être positive). Le centre est donc $(2;0)$ et le rayon $r = 2 > 0$. (1 pt)