L1S1 PCST — DOCUMENTS ET MOBILES INTERDITS — ORSAY NOV 2025
CALCULUS — CALCULETTE TYPE COLLÈGE PERMISE — **Durée 1h30**
JUSTIFIER VOS CALCULS.

Exercice 1 - [4 pts] Simplifier autant que possible (i est l'unité imaginaire et $a > b > 0$) :

(**a**) $\dfrac{a\,+\,b}{a^2-b^2}$, (**b**) $\exp\left(2\ \ln(a) - \ln(b)\right)$, (**c**) $\exp(a+i\ \dfrac{\pi}{2})$, (**d**) $\dfrac{a^2\,+\,b^2}{a\,+\,i\,b}$.

[**1**] (**a**) $= \dfrac{a+b}{(a-b)(a+b)} = \dfrac{1}{a-b}$. [**1**] (**b**) $= \dfrac{\exp(\ln(a^2))}{\exp(\ln(b))} = \dfrac{a^2}{b}$.

[**1**] (**c**) $= e^a \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = e^a\left(\cos(\dfrac{\pi}{2}) + i\sin(\dfrac{\pi}{2})\right) = e^a i.$ [**1**] (**d**) $= \dfrac{(a+ib)(a-ib)}{a+ib} = a-ib.$

Exercice 2 - [5 pts]

Soit $a > 0$. Déterminer le domaine de définition et calculer la dérivée de chaque expression en fonction de x. La fonction f en (**d**) est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$:

(**a**) $3x^5 - 7x^2$, (**b**) $x\ \sin(\pi\, x^2)$, (**c**) $\ln(a^2 - x^2)$, (**d**) $\sqrt{1 + f(x)^2}$.

[**0,5**] Pour (a),(b),(d) le domaine est $\mathbb{R}$. [**0,5**] Pour (c) $a^2 - x^2 > 0 \Leftrightarrow |x| < a$.

[**1**] (**a**) $15x^4 - 14x$. [**1**] (**b**) $\sin(\pi x^2) + 2\pi x^2\cos(\pi x^2)$.

[**1**] (**c**) $\dfrac{-2x}{a^2-x^2}$ [**1**] (**d**) $\dfrac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1+f(x)^2}}$

Exercice 3 - [3 pts] Utiliser les identités d'Euler pour développer $e^{3\,i\,t} = \left(e^{i\,t}\right)^3$ et en déduire des formules pour $\cos(3t)$ et $\sin(3t)$ en fonction de $\cos(t)$ et $\sin(t)$.

[**3 pts**] On utilise $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$:

$$\left(e^{it}\right)^3 = (\cos(t) + i\sin(t)))^3 = \cos^3(t) + 3i\cos^2(t)\sin(t) - 3\cos(t)\sin^2(t) - i\sin^3(t).$$

Donc, $e^{3it} = \cos(3t) + i\sin(3t) = \left(\cos^3(t) - 3\cos(t)\sin^2(t)\right) + i\left(3\cos^2(t)\sin(t) - \sin^3(t)\right)$,

et par identification des parties réelles et imaginaires :

$\cos(3t) = \cos^3(t) - 3\cos(t)\sin^2(t)$ et $\sin(3t) = 3\cos^2(t)\sin(t) - \sin^3(t)$.

Exercice 4 - [3 pts] Soit $a > 0$ et $f(x) = ax(1-x)$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
2. Faire un tableau de variation pour f et déterminer les points extremaux (s'il y en a).
3. Calculer l'équation de la tangente au graphe de f en $(1, f(1))$.

1. **[1 pt]** Comme $a \neq 0$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x(1-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$.
2. **[1 pt]** $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. On trouve : $f \;:\; [-\infty \to \frac{1}{2} \to +\infty] \;\to\; [-\infty \nearrow \frac{a}{4} \searrow -\infty]$

   Il y a un point extremal (maximum global) : $\left(\dfrac{1}{2} \,;\, \dfrac{a}{4}\right)$
3. **[1 pt]** On a $f'(1) = -a$ et $y = f(1) + f'(1)(x-1) = 0 - a(x-1) = -ax + a$.

Exercice 5 - [3 pts] Calculer les intégrales suivantes :

$$(\mathbf{a}) \quad \int_0^2 x^2(3-x)\, dx \;, \qquad (\mathbf{b}) \quad \int_0^1 (x+2)e^x\, dx \;, \qquad (\mathbf{c}) \quad \int_0^2 xe^{x^2}\, dx \;,$$

[1] (**a**) $\quad = \left[x^3 - \dfrac{x^4}{4}\right]_0^2 = 8 - \dfrac{16}{4} = 4.$

[1] (**b**) $\quad = \Big[e^x(x+2)\Big]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 e^x\, dx = \Big[e^x(x+1)\Big]_0^1 = 2e - 1 = 4,43656...$

[1] (**c**) $\quad = \left[\dfrac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^2 = \dfrac{1}{2}(e^4 - 1) = 26,79907...$

Exercice 6 - [2 pts] Calculer la limite : $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n} \exp\left(-\frac{2k}{n}\right).$

[2] Il s'agit de la somme de Riemann pour $f(x) = e^{-2x}$ entre $x = 0$ et $x = 1$. La limite vaut

$$\int_0^1 e^{-2x} dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(1 - e^{-2}) \qquad\qquad (= 0,43233...)$$