1 Notation, ensembles et logiques, nombres complexes.

Exercice 1.1. Développer et, si possible, simplifier les expressions suivantes, sans utiliser calculette : [Pour simplifier certains calculs chercher le 'bon' ordre pour les faire]

(1) $\frac{8}{3} \times \frac{9}{4}$, (2) $\frac{24}{13} \Big/ \frac{6}{26}$, (3) $(2+3+4+5+6-1-2-3-4-5)$, (4) $(a^2b)^3 \times \frac{b^2}{a^3}$,

(5) $\frac{(ab)^2c}{a^5(b/c)^3}$, (6) $(x-4)(x+2)+8$, (7) $(x-a)(x+a)$, (8) $\frac{x^2-4}{x+2}$,

(9) $(x-a)^3$, (10) $(x-a)(x^2+xa+a^2)$, (11) $a\,x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right)$, (12) $\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a}$.

Exercice 1.2. Écrire sous la forme complexe standard réduite, $a+i\,b$, les expressions suivantes :

(a) $i(2+i)-(3-i)$, (b) $(2+i)\overline{(3-4i)}$, (c) $\frac{2}{2-i}-\frac{i}{2+i}$,

(d) $\frac{2+3i}{3+4i}$, (e) $(x+y\,i)^2$, (f) $\frac{1}{x+iy}$, (g) $(2+i)^3(2-i)^3$.

Exercice 1.3. Calculer : i^n pour $n = 2,3,4,5,6...$ et Dessiner ces points dans $\mathbb{C}$. Que vaut i^{2025} ? (Indication : On peut écrire tout $n \in \mathbb{Z}$ comme $n = 4m+k$ avec m un entier et $k \in \{0,1,2,3\}$).

Exercice 1.4. Soit $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ et calculer : z^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Dessiner les points dans $\mathbb{C}$. Que vaut z^{2025} ? (Indication : On peut écrire tout $n \in \mathbb{Z}$ comme $n = 8m+k$ avec m un entier et $k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$).

Exercice 1.5. Résoudre pour $z \in \mathbb{C}$ l'équation : $z^2+4z+13=0$.

Exercice 1.6. Rappel : Le module de $z=a+bi$ est donnée par : $|z| = \sqrt{\bar{z}z} = \sqrt{a^2+b^2}$.

1. Soit $z=a+bi, w=c+di \in \mathbb{C}$. Montrer que :

   (a) $\overline{(zw)} = (\bar{z})(\overline{w})$, (b) $|zw| = |z|\,|w|$, (c) $|z^n| = |z|^n,\ n \geq 1$ (d) $|z+w| \leq |z|+|w|$.

Exercice 1.7.

(a) Calculer $(2+3i)^2$ et résoudre l'équation pour $w \in \mathbb{C}$: $w^2 = -5+12\,i$.

(b) (*) Résoudre l'équation pour $z \in \mathbb{C}$: $z^2 - iz - 3i + 1 = 0$.

Indication : On pourra utiliser la formule habituelle (avec discriminant) pour les racines d'un trinôme ainsi que le résultat de (a).

2 Fonctions et dérivées. L'identité d'Euler.

Exercice 2.1. Soit f la fonction $f(x) = x^2 - 2$, $x \in \mathbb{R}$ et $h(x) = 2x - 3$.

1. Esquisser le graphe de f et déterminer graphiquement les antécédents de 2, -1 et -4, respectivement.
2. Calculer $f(h(2))$ et $h(f(2))$.

Exercice 2.2. Simplifier (à priori sans calculette, mais on peut vérifier sur calculette après)

$$\sqrt{(245)^2}, \quad \left(\sqrt{88}\right)^2, \quad \exp(\ln(10)), \quad \ln(\exp(8)), \quad \log_{10}(1000),$$

$$\exp(3\ln(10)), \quad \ln(20^3) - \ln(8) - \ln(100), \quad \cos^4(t) + 2\sin^2(t)\cos^2(t) + \sin^4(t),$$

Exercice 2.3. Calculer les dérivées de :

$$x^3 - 3x, \qquad x^2\sin(x), \qquad \sin(x)\cos(x), \qquad \frac{\sin(x)}{x^2}, \qquad \frac{x}{1+4x}, \qquad x^2 + \sin(2x)$$

Exercice 2.4. Soit $f(x) = x^3 - 3x$. Calculer l'équation de la tangente du graphe de f en $x = 1$.

Exercice 2.5. Déterminer le domaine de définition (naturelle) de chaque expression et calculer sa dérivée ($a \neq 0$ est une constante réelle) :

$$\frac{1}{a^2 - x^2}, \quad \ln(1 - x^2), \quad \frac{\sqrt{x}}{1-x}, \quad \sqrt{1+2x}, \quad \frac{x^2}{x}, \quad \frac{1-x^2}{1+x}, \quad \frac{\sin(a\,x)}{x^2},$$

Exercice 2.6. Soit $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ des constantes. On suppose que f est dérivable et que les fonctions composées suivantes sont bien définies. Exprimer pour chaque fonction ci-dessous sa dérivée en utilisant des fonctions usuelles et f' :

$$f(ax), \qquad af(x), \qquad (f(x))^n, \qquad f(x^n), \qquad \ln(f(x)), \qquad f(\ln(x)), \qquad \sqrt{f(\sqrt{x})}.$$

Exercice 2.7. Montrer que $z = \exp\left(\dfrac{\pi i}{3}\right) = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Que vaut z^3 et z^6 ? Esquisser dans le plan complexe les positions de chaque puissance de z : z^2, z^3, z^4,...

Exercice 2.8.

1. Rappeler les identités d'Euler pour e^{it} et e^{-it}.
2. Développer de deux façons $e^{2it} = \left(e^{it}\right)^2$ et en déduire des formules pour $\cos(2t)$ et $\sin(2t)$ en fonction de $\cos(t)$ et $\sin(t)$. (En principe déjà vu en cours, mais essayez de refaire les calculs sans regarder les notes de cours).
3. De même développer $e^{3it} = \left(e^{it}\right)^3$ et trouver des formules pour $\cos(3t)$ et $\sin(3t)$.

3 Etudes des fonctions.

Exercice 3.9. Trois fois passera.

De 8h30 à 12h30 un facteur distribue le courrier dans un gratte-ciel. A 9h le facteur est au 5ème étage et à 12h il est au 23ème étage.

1. Montrer que le facteur est passé par le 10ème étage entre 9h et 12h.
2. On apprend que le facteur a été vu au 30ème étage à 10h, et au rez-de-chaussée à 11h. Combien de fois (au moins) a t-il dû passer par le 10ème étage lors de sa tournée ?

Exercice 3.10. Montrer que le polynôme $x^3 + x - 1$ admet précisément une racine dans l'intervalle $[0\,;1]$. Est-ce que cette racine est plus grand ou plus petit que $1/2$?

Exercice 3.11. Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a > 0$.

1. Dresser un tableau de variation pour f et montrer que f admet un unique point minimal.
2. Montrer que l'ordonnée du point minimal est négatif ssi le discriminant du trinôme est positif.
3. Quel est le lien entre ce dernier résultat et l'existence des racines réelles du trinôme ?

Exercice 3.12. Soit $f(x) = (x^2 - 1)^2$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $f'(x)$ et déterminer les zéros de $f'(x)$.

   Indication : Faut calculer f' comme dérivée d'une fonction composée et garder l'expression de f' comme produit. Ensuite utiliser que si un produit vaut zéro alors un des facteurs vaut zéro.
2. Faire un TdV et déterminer les intervalles de monotonicités. (là où f est croissante, respectivement décroissante).
3. Esquisser le graphe de f (sans calculatrice, après on peut vérifier avec calculatrice).

Exercice 3.13. Soit $a \neq 0$. Calculer $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a}$ et comparer avec la dérivée de $1/x$, $x \neq 0$.

Exercice 3.14. Montrer que $(x - a)(x^2 + xa + a^2) = x^3 - a^3$. Calculer $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^3 - a^3}{x - a}$ et comparer avec la dérivée de x^3.

Exercice 3.15. Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.
Dresser le tableau de variation de f et donner l'allure de son graphe.

Exercice 3.16. Dérivée de la réciproque : Soit $I = [0\,;1[$ et $f : I \to \mathbb{R}$ la fonction $f(x) = \dfrac{x}{1-x^4}$.

1. Quel est le sens de variation de f ? Déterminer l'intervalle image $J = f(I)$.
   Montrer que $f : I \to J$ est bijective. On note $g : J \to I$ sa fonction réciproque.
2. Calculer $f(\frac{1}{2}), f'(\frac{1}{2})$ et en déduire $g'(\frac{8}{15})$.

Exercice 3.17. Monsieur Dupont voyage en voiture sur une autoroute en France. Il a passé le péage P1 à 12h15, ensuite le péage P2 à 14h15. La distance entre P1 et P2 est de 300 km. La police lui a ensuite dressé un procès-verbal pour excès de vitesse. Expliquer comment la police pourrait être sûr que M. Dupont a commis une infraction.

Exercice 3.18. Soit $f :]\,0, +\infty\,[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2 \ln x$.

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)$.
2. Calculer $f'(x)$. Etudier son signe. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f'(x)$.
3. Calculer $f''(x)$. Etudier la convexité et la concavité de f.
4. Dresser le tableau de variation de f, donner l'allure de son graphe.

Exercice 3.19. [Rappel : $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de dérivée identique nulle sur l'intervalle I. Alors f est une fonction constante.]

1. Soit $f(x) = \sin^2(x)$ et $g(x) = \cos^2(x)$. Calculer $f'(x)$, $g'(x)$ et $f'(x) + g'(x)$. Calculer $f(0) + g(0)$. En déduire une identité que vous connaissez sans doute déjà...
2. (*) Soit $f(x) = \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$, $x > 0$. Calculer pour $x > 0$ la valeur de $f'(x)$. Calculer aussi $f(1)$ et en déduire une identité.

Exercice 3.20 (*).
Soit $f(x) = \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que sur l'intervalle $x \in I = \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, la fonction $\sin(x)$ est strictement croissante. et déterminer l'image $J = f(I)$.
2. Montrer que $f : I \to J$ admet une unique fonction réciproque $\mathrm{Arcsin} : J \to I$.
3. Rappelons la formule : $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.
   Soit $x \in I$. Exprimer la dérivée de $\sin(x)$ en fonction de $y = \sin(x)$ elle-même.
4. En déduire une formule pour la dérivée de $\mathrm{Arcsin}(y)$, $y \in J$.
   (Indication : Comme fait en cours pour la fonction $\tan(x)$, $|x| < \pi/2$).

4 Intégration.

Exercice 4.21. Calculer

$$(1)\ \int_0^2 x^2(x-3)\,dx, \quad (2)\ \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(2x)\,dx, \quad (3)\ \int_0^4 \frac{1}{2x+1}\,dx, \quad (4)\ \int_0^{\ln(2)} (e^x+e^{4x})\,dx,$$

$$(5)\ \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^3}dx, \quad (6)\ \int_0^2 \frac{(x^2-1)x}{x+1}\,dx, \quad (7)\ \int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+1}dx, \quad (8)\ \int_0^{\ln(2)} \frac{e^{2x}-1}{e^x+1}.$$

Exercice 4.22. Soient c un réel strictement positif et a, b deux réels tels que $a < 0 < b$ et soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} -(\frac{c}{a})x + c & \text{si } a \leq x < 0 \\ -(\frac{c}{b})x + c & \text{si } 0 \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue et dessiner le graphe de f
2. Calculer $\int_a^b f(x)dx$. Retrouver géométriquement ce résultat.

Exercice 4.23. Esquisser les figures suivantes et calculer leur aire :

$$A = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2, \quad 1-x^3 \leq y \leq 1+x\} \qquad B = \{(x,y) : 0 \leq x \leq \pi, \quad -1+\cos(x) \leq y \leq 1+\cos x\}.$$

Exercice 4.24. Interpréter comme somme de Riemann et calculer les intégrales correspondantes :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{k^3}{n^4}, \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{\pi k}{n}\right) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n} \exp\left(\frac{3k}{n}\right)$$

Exercice 4.25. En utilisant IPP (une ou plusieurs fois), calculer les intégrales/primitives ($a > 0$) :

$$(1)\ \int_0^1 (x+1)\,e^x\,dx, \quad (2)\ \int_0^a x^2 e^{-x/a}\,dx, \quad (3)\ \int_2^3 \ln x\,dx$$

$$(4)(**)\ \int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx, \quad (5)\ \int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx, \quad (6)\ \int e^x \sin x\,dx.$$

Exercice 4.26. Calculer les primitives suivantes :

$$(1)\ \int (x^2+x)^4\,(2x+1)\,dx, \quad (2)\ \int x\,e^{\frac{x^2}{2}}\,dx, \quad (3)\ \int \frac{3x}{x^2+5}\,dx$$

$$(4)\ \int \frac{x-3}{x+3}\,dx, \quad (5)\ \int \tan x\,dx, \quad (6)\ \int \frac{\cos x}{2+\sin x}\,dx, \quad (7)(**)\ \int \frac{1}{e^{-x}+1}\,dx.$$

Exercice 4.27.

1. A l'aide du changement de variable $u = x^3$, calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x^2}{1+x^6}\, dx$.

2. A l'aide du changement de variable $u = \cos x$, calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \sin^3(x)dx$.

3. On suppose $x > 0$: A l'aide du changement de variable $u = \sqrt{x}$ ou bien $x = u^2$ calculer $\displaystyle\int \cos(\sqrt{x})\, dx$

Exercice 4.28. Voici le tableau de variation d'une fonction dérivable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	5	$\searrow$	3	$\nearrow$	6

1. Déterminer le nombre d'antécédents de respectivement : $y = -2,\ 0,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$.
   (Indication : Faire un dessin).

2. (**) Montrer que : $\quad 3 \ < \ \displaystyle\frac{1}{5}\int_4^9 f(x)dx \ < \ 6.$

Exercice 4.29. Montrer que les intégrales suivantes sont convergentes et calculer leurs valuers :

$$(1) \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^5} dx \qquad (2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

Exercice 4.30 (**). Calculer : $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx$. Interprêter géométriquement ce résultat.

Indication : Utiliser la substitution $x = \sin(t)$ et la formule $2\cos^2 t = 1 + \cos(2t)$.

Exercice 4.31 (**).

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $R > 0$ on pose $U_n(R) = \displaystyle\int_0^R x^n e^{-x} dx$.
   (a) Calculer $U_0(R)$ et $U_1(R)$.
   (b) Montrer que $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ et $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx$ sont convergentes et calculer leur valeur.

2. Montrer que pour tout entier n, $U_{n+1}(R) = (n+1)U_n(R) - R^{n+1}e^{-R}$.

3. En déduire que pour tout entier n, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$ est convergente et calculer sa valeur.

5 Équations différentielles.

Exercice 5.32. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

$$(1)\quad \begin{cases} y'(x) = 2\,x^3 \\ y(1) = 2 \end{cases}, \quad (2)\quad \begin{cases} y'(x) = xe^{-x/2} \\ y(0) = 0 \end{cases}, \quad (3)\quad \begin{cases} y'(x) = -\sin x + \cos x. \\ y(\pi) = 1 \end{cases},$$

Exercice 5.33. Pour les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$, déterminer :

1. La solution de l'équation homogène associée.
2. Une solution particulière : Ici on est sensé de "deviner" une telle solution sous la forme d'une fonction de même "type" que le terme à droite (comme fait la plupart du temps dans le cours).
3. La solution générale.
4. L'unique solution $y(x)$ qui satisfait la condition initiale : $y(0) = 0$.

$$(1)\quad y' + \frac{1}{2}y = 1, \quad (2)\quad y' - 2y = x^2 + x, \quad (3)\quad y' - 2y = \sin(x), \quad (4)\quad y' - y = e^{5x}.$$

Exercice 5.34. (*) On cherche à déterminer la solution générale de : $y'(x) - 3y(x) = e^{3x}$.
Ici on est sensé de trouver d'abord la solution de l'équation homogène, et pour cette solution utiliser la méthode "variation de la constante".

Donner ensuite la solution vérifiant la condition initiale $y(0) = 1$.

Exercice 5.35. Déterminer la solution générale de : $y''(x) = \cos \dfrac{x}{2}$.

Puis donner la solution vérifiant les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$:

Exercice 5.36. Déterminer le polynôme caractéristique et résoudre l'équation différentielle pour chacun des problèmes :

1. $y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 0$.
2. $y''(x) + 4y(x) = 0$.

Dans les deux cas, trouver la solution qui vérifie : $y(0) = -1$ et $y'(0) = 1$.

Exercice 5.37. Soit $\omega \neq 0$ fixe et $\alpha \neq \omega$ un paramètre que l'on peut varier. On considère l'équation différentielle :

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = \cos(\alpha t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad y(0) = 0 \;\text{ et }\; y'(0) = 0.$$

1. Chercher d'abord une solution particulière.
2. En déduire toutes les solutions de l'équation.
3. (**) Que ce passe-t-il quand $\alpha \to \omega$?

Exercice 5.38. Pour chaque problème suivant, utiliser séparation de variables pour le résoudre et déterminer ensuite l'intervalle maximale de définition (dans le temps) de la solution :

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dt} &= -t\,y, \\ y(0) &= 1, \end{cases} \qquad (2) \quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} &= e^{-y}\cos(t), \\ y\,(0) &= 1, \end{cases} \qquad (3) \quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} &= t\,y^2, \\ y(0) &= 1. \end{cases}$$

Exercice 5.39.

1. Déterminer les racines complexes de : $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$.
2. Trouver la solution générale de : $I''(t) + 2I'(t) + 5I(t) = 0$.
3. Déterminer l'unique solution qui vérifie : $I(0) = 0$, $I'(0) = 1$ et esquisser la solution.
4. (**) Soit $\omega > 0$. Trouver une solution complexe particulière de :

$$I''(t) + 2I'(t) + 5I(t) = e^{i\omega t}$$

Exercice 5.40. (**)
Jean saute avec son parachute d'un avion en grande altitude. On s'intéresse à sa vitesse verticale (que l'on considère positive vers le haut) $v(t)$ en fonction du temps. La vitesse change à cause de la gravitation et la friction avec l'air. On suppose ici que $v(t)$ approximativement suit une EDO : $v'(t) = -g - \alpha\; v(t)$. Initialement $v(0) = 0$. Ici $g = 10\; ms^{-2}$ est l'accélération gravitationnelle (qui pointe vers le bas) et $\alpha > 0$ un coefficient de friction dont la valeur dépend si le parachute est ouvert ou fermé.

1. Avec le parachute fermé on estime que $\alpha_f = \frac{1}{6}\; s^{-1}$. Déterminer $v(t)$ en fonction de $t \geq 0$ ainsi que la vitesse limite théorique (en m/s et km/h) $c = \lim_{t\to\infty} v(t)$.
2. Après 60 s de chute libre, Jean ouvre son parachute (on peut approximer sa vitesse à ce moment par c la vitesse limite). On estime que $\alpha_o = 2\; s^{-1}$ avec le parachute ouvert. Déterminer $v(t)$ en fonction de $t \geq 60\; s$.
3. Selon ce modèle, quelle est sa vitesse et son accélération juste après qu'il ouvre son parachute ?
4. Jean atterit 5 s plus tard. À quelle vitesse atterrit-il (approximativement) ?
5. Dessiner le graphe de $v(t)$, $t \in [0; 65]$ (t en secondes).

6 Polynômes de Taylor et DL_n.

Exercice 6.41. Rappel : $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$, $x \neq 1$.

1. Pour quelles valeurs de x est-ce que la limite $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + x + x^2 + \cdots + x^n\right)$ existe ?
   Calculer cette limite quand elle existe.

2. Montrer le $DL_n(0)$: $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\epsilon(x)$, où $\epsilon(x)$ est une fonction qui tend vers zéro quand $x \to 0$.

3. Soit $a \in \mathbb{R}$. Trouver un $DL_n(0)$ pour $\dfrac{1}{1-ax}$ et un $DL_{2n}(0)$ pour $\dfrac{1}{1-x^2}$.

4. Soit $a \neq 0$. Trouver un $DL_n(0)$ de $\dfrac{1}{a-x}$.

Exercice 6.42. Soit la fonction $f(x) = x^3 - 3x$ et $a \in \mathbb{R}$. On note $P_{n,a}(x)$ son polynôme de Taylor d'ordre n en $x = a$.

1. Pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, calculer $P_{n,a}(x)$, le polynôme de Taylor de f d'ordre n en $x = a$.
2. Considérer en particulier le cas $a = 0$. Que observe-t-on ?
3. Donner un $DL_n(a)$ de f pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Exercice 6.43. Calculer le triangle de Pascal jusqu'à $n = 4$.

1. Vérifier par calcul direct (et comparer avec le triangle de Pascal) que
$$(a+b)\ \ (a^3 + 3a^2b + 3a^1b^2 + b^3) \quad = \quad a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + b^4.$$
2. Trouver le développement binômial pour $(a+b)^5$.

Exercice 6.44. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Rappeler ou calculer les $DL_5(0)$ des fonctions suivantes :

$$(1)\quad \sin(ax), \qquad (2)\quad \cos(ax), \qquad (3)\quad \exp(ax), \qquad (4)\quad \ln(1+ax),$$

Exercice 6.45. Calculer les $DL_5(0)$ des fonctions suivantes :

$$(5)\quad \sin(x^2), \qquad (6)\quad \exp(x^2), \qquad (7)\quad \ln(1+x^2)..$$

Indication : On pourra utiliser les DLs des fonctions 'standard', ensuite utiliser des 'substitutions'.

Exercice 6.46. Calculer un $DL_4(0)$ de

$$(1)\quad \cos^2(x), \qquad (2)\quad \ln\frac{1+x}{1-x}, \qquad (3)\quad e^x\sin(x).$$

Exercice 6.47. En utilisant un DL de $\sin(x)$, calculer un $DL_4(0)$ de la fonction : $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.

En utilisant directement la formule de Taylor sur la fonction f essayer de déterminer un $DL_2(0)$ de f.

Exercice 6.48. Soit $a \neq 0$. Trouver un équivalent "simple" quand $x \to 0$ des expressions suivantes :

$$(1) \quad \sin(ax), \qquad (2) \quad 1-\cos(ax), \qquad (3) \quad \ln(1+ax), \qquad (4) \quad \ln(\cos(ax)).$$

Exercice 6.49. En utilisant DL, équivalents ou l'Hôpital, calculer les limites suivantes ($b \neq 0$):

$$(1) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+ax}-1}{b\,x} \qquad (2) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+ax)}{b\,x} \qquad (3) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+ax)}{b\,x+\sin(2\,b\,x)}$$

$$(4) \quad \lim_{x\to 2} \frac{\ln(x/2)}{x^2-4}, \qquad (5) \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(ax)}{x^2}, \qquad (6) \quad \lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x-e^{-x}},$$

Exercice 6.50. Calculer les limites (avec $a \in \mathbb{R}$) :

$$(7) \quad \lim_{x\to 0} (1+ax)^{1/x}, \qquad (8) \quad \lim_{N\to+\infty} \left(1+\frac{a}{N}\right)^N, \qquad .$$

Exercice 6.51. En utilisant des équivalents "simple" du numérateur et dénominateur lorsque $x \to +\infty$, calculer

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\,(x^2-3x)}{\ln\,(x^4+7x^3)}$$

Exercice 6.52 (**).

1. Soit f une fonction dérivable au voisinage de $x=0$ qui vérifie l'équation différentielle :

$$\begin{cases} f'(x) &= 1+f^2(x), \\ f(0) &= 0. \end{cases}$$

   Calculer un $DL_3(0)$ de f en utilisant juste l'équation différentielle sans la résoudre.

2. Résoudre l'équation différentielle (avec séparation de variable) et déterminer f.

7 Géométrie dans le plan.

Exercice 7.53. Soit T un triangle de cotés 4, 5 et 3. Est-ce que ce triangle possède un angle droit ?

Exercice 7.54. Soit $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ \alpha \end{pmatrix}$.

Pour quelle(s) valeur(s) de α sont ces deux vecteurs orthogonaux, respectivement parallèlles ? Faire un dessin illustratif.

Exercice 7.55. On considère la droite (AB) avec $A(1;2)$ et $B(2;-1)$.

1. Déterminer un vecteur directeur et donner une représentation paramétrique de la droite.
2. Trouver un vecteur normal à la droite et déterminer une équation cartésienne de (AB).
3. Déterminer l'équation de la droite D qui est orthogonale à (AB) et passe par le point $P(4;3)$.
4. Déterminer le point d'intersection entre (AB) et D.
5. Calculer la distance entre $P(4;3)$ et la droite (AB).

Exercice 7.56. Soit $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Rappelons que : $\widehat{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. En utilisant le produit scalaire et des vecteurs 'chapeaux' :

1. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{w} = a\,\overrightarrow{v} + b\,\widehat{v}$.
2. Déterminer $c, d \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{w} = c\,\overrightarrow{u} + d\,\widehat{v}$.

Exercice 7.57. Soient α un réel, et D la droite d'équation $x\cos\alpha + y\sin\alpha = 1$.

1. Trouver la distance entre D et l'origine $\mathcal{O}(0;0)$.
2. Déterminer l'unique point où D est tangente au cercle de rayon 1 centré à l'origine.
3. Faire un dessin pour $\alpha = \pi/4$.

Exercice 7.58. Soient $A(2;0)$ et $B(-2;0)$. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble de points $M(x;y)$ tels que $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM}$. Montrer que $\mathcal{C}$ est un cercle et déterminer son centre et son rayon.

Exercice 7.59. Soit ABC un triangle de cotés a, b et c. Développer de deux manières le produit scalaire $(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}) \cdot (\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB})$ et en déduire la relation dite Pythagore généralisée : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\angle C)$.

Exercice 7.60. En coordonnées polaire (r, θ) on considère la courbe tracée par : $r(\theta) = 6\cos\theta + 8\sin\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que la courbe est un cercle et donner son équation cartésienne. Quel est le rayon de ce cercle ? (Indication : On pourra multiplier avec r sur les deux cotés et déterminer une équation cartésienne pour la courbe).

Exercice 7.61. En coordonnées polaire (r, θ) montrer que la courbe tracée par : $r(\theta) = \dfrac{1}{6\cos\theta + 8\sin\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$ une droite et donner son équation cartésienne.

Exercice 7.62. **(*)** Vérifier que le produit scalaire et la norme vérifie :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{4}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2\right). \tag{1}$$

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 + \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = 2\|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\|\overrightarrow{v}\|^2. \tag{2}$$

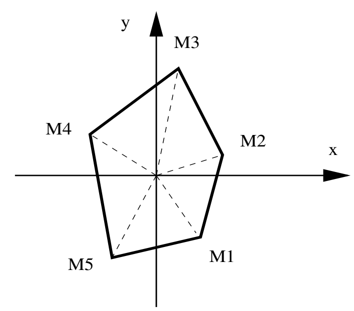
Concernant la dernière identité, interpreter géométriquement pour un parallélogramme de coté a et b et les deux diagonales de longueur d_1 et d_2.

Exercice 7.63. Déterminer l'aire du triangle de sommets $A(1;2)$; $B(2;7)$; $C(5;-2)$.

Exercice 7.64. **(*)** Soit $\mathcal{P}$ un polygône convexe de sommets
$M_1(x_1;y_1), \ldots, M_n(x_n;y_n)$, $n \geq 3$. Pour simplifier on suppose que $\mathcal{O}(0;0)$ est à l'intérieur du polygone (voir figure avec un exemple pour $n = 5$). Montrer que l'aire du polygône est donné par l'expression :

$$\frac{1}{2}\ \left|\ (x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + \cdots + (x_ny_1 - x_1y_n)\ \right|.$$

Suggestion : Découper le polygône en triangles avec l'origine comme un point de chaque triangle, et utiliser la méthode de l'exercice précédente.



8 Fonctions à plusieurs variables et géométrie dans l'espace.

Exercice 8.65. Pour chaque fonction déterminer son ensemble de définition et esquisser les lignes de niveau pour quelques hauters, par ex -1, 0 et 1 :

$$(9) \quad f(x,y) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3}\ , \qquad (10) \quad f(x,y) = \frac{y}{x}\ ,$$

Exercice 8.66. Pour les fonctions suivantes calculer leurs dérivées partielles :

$$(1) \quad f(x,y) = x^2(y^4 + x) + xy + 7x, \qquad (2) \quad f(x,y) = \frac{x}{1+xy}, \qquad (3) \quad f(p,V,T) = \frac{pV^{5/3}}{T}.$$

Exercice 8.67.

1. Tracer quelques lignes de niveau pour $x^2 + y^2$ ainsi que pour y/x. Montrer que la famille de lignes de niveau de $x^2 + y^2$ est orthogonale à la famille de lignes de niveau de y/x. (Indication : Considérer les gradients).
2. Tracer quelques lignes de niveau (par ex pour hauteurs $-1, 0, 1$) de xy et $x^2 - y^2$. Montrer que ces deux familles de lignes de niveau sont également orthogonales entre elles.

Exercice 8.68. Soit $f(x,y) = x^2y^3$ et $M(2;1)$ un point dans le plan.

1. Calculer le gradient de f.
2. Déterminer l'équation dans le plan (x,y) de la ligne de niveau L de la fonction f et qui passe par M.

Exercice 8.69. La position et quantité de mouvement, $(x(t), p(t))$ à temps $t \in \mathbb{R}$ d'un pendule, obéit l'équation différentielle :

$$\frac{dx}{dt} = p(t), \qquad \frac{dp}{dt} = -\sin(x(t)).$$

Notons $H(x,p) = \frac{1}{2}p^2 + (1 - \cos(x))$.

1. Calculer les dérivées partielles de H. En déduire que l'équation différentielle peut s'écrire :
$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$
2. Calculer $\dfrac{d}{dt}H(x(t), p(t))$ et en déduire qu'une orbite du pendule suit une courbe de niveau de H.
3. Montrer que $(x(0), p(0)) = (0,0)$ est un point stationnaire pour l'orbite du pendule.
4. Montrer que si $x(0), p(0)$ est proche de $(0,0)$, alors l'orbite est approximativement un cercle.