

Resumé du cours Calculus : Calculus.

(Peut évoluer le long le semestre)

Concernant les MCC les prévisions actuelles pour les épreuves sont :

- Deux interrogations (courtes - environ 20 minutes) écrites auront lieu au cours du semestre, pendant les TDs.
- Deux épreuves de synthèses (intermédiaire et finale).

Châpitres prévus (mots clés) :

1. Ensembles, nombres (entiers, rationnels et réels), logique (propositions et implications). Racines des trinômes. Nombres complexes, propriétés algébriques.
2. Fonctions, compositions des fonctions. Limite, continuité. Antécédent, bijection et fonction réciproque. Dérivée et dérivée des fonctions composées. Fonctions trigonométriques, logarithmes, exponentielles. Exponentielle complexe et l'identité d'Euler.
3. Étude des fonctions réelles. Théorèmes des valeurs intermédiaires et des accroissements finis. Extrema. Tableau de variation. Convexité et concavité.
4. Intégration. Aire. Primitive. Intégration par parties. Changement de variables.
5. Équations différentielles. Cas linéaire ordre 1 et 2 (exponentielle complexe). Cas affine. Équation homogène associée. Principe de superposition. Séparation de variables.
6. Polynômes et séries de Taylor. Développement limité et applications.
7. Géométrie du plan. Plan et vecteurs. Produit scalaire. Projection orthogonale le long une direction. Droites, cercles, intersections. Distance à une droite. Tangente d'un cercle. L'aire d'un triangle engendré par deux vecteurs.
8. Courbes paramétrées. Fonctions à deux (ou plusieurs) variables. Lignes de niveau. Dérivées partielles. Gradient. Tangente d'une ligne de niveau.

Quelques suggestions bibliographique :

- L. Lesieur et J. Lefebvre : P.C. Analyse première année et speciale B, t.1 Analyse ;
Biblio Univ Orsay : Bm 1284
- J. Stewart, Analyse : Concepts et contextes, vol 1 : fonction d'une variable.
Biblio Univ Orsay : 515.8 STE ana.

Résumé du cours (Toujours en cours de rédaction ...)

1 Ensembles, nombres et logique

1. Notation pour les ensembles de nombres utilisés dans le cours : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.
(naturelles, entiers relatifs, rationnels, réels, complexes)
2. Sous-ensembles (notamment de $\mathbb{R}$), intersection, union. Intervalles ouverts, fermés, bornés.
Exemples : $\mathbb{R}_+ =]0, +\infty[$, $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty[$, $]2; 5[\cap [3; 8[= [3; 5[$.
3. Propositions et quantificateurs : $\forall$ = "pour tout", $\exists$ = "il existe". Exemples :

$$\mathcal{P}_1 : \forall x > 0 : x^2 > 0.$$

$$\mathcal{P}_2 : \exists n \in \mathbb{N} : 3n + 5 = 14.$$

$$\mathcal{P}_3 : \exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0.$$

Parmi ces proposition $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont vraies, tandis que $\mathcal{P}_3$ est fausse.

4. Nombres complexes. L'unité imaginaire i vérifie $i^2 = -1$. Définitions et propriétés :
 - $\mathbb{C} = \{z = a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$.
 - $a + bi = a - bi$ (complexe conjugué).
 - $(a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i$
 - $(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$
 - $\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$ (pourvu que $c + di \neq 0$).
 - Le module de $z = a + bi$ est $|z| = \sqrt{z \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$.
5. Tout trinôme $az^2 + bz + c = 0$ (avec $a \neq 0$) admet une ou deux racines réelles ou complexes.

2 Fonctions

DÉFINITION : Une fonction $f : A \rightarrow B$ est la donnée de trois choses :

1. Un domaine de définition A (le plus souvent un sous-ensemble de $\mathbb{R}$).
2. Un espace d'arrivé B (le plus souvent $\mathbb{R}$).
3. Une application qui 'a tout $x \in A$ associe une valeur $y = f(x) \in B$.

EXEMPLE : $f : [2; 3] \rightarrow [4; 9]$, $f(x) = x^2$ pour $x \in [2; 3]$.

DÉFINITIONS : Le graphe d'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ avec $I \subset \mathbb{R}$ est l'ensemble des points (x, y) dans le plan $\mathbb{R}^2$ tels que $x \in I$ et $y = f(x)$.

- **fonctions affines** : Ce sont les fonctions de la forme $f(x) = ax + b$. On peut les définir sur $\mathbb{R}$ entier. Leur graphe (la courbe d'équation $y = ax + b$) est une droite de pente a qui passe par le point $(0; b)$. Le sens de variation de la pente dépend du signe de a .
- **fonctions quadratiques** : Ce sont les fonctions de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a un réel non nul. Leur graphe (la courbe d'équation $y = ax^2 + bx + c$) est une parabole dont les branches partent vers le haut si $a > 0$ vers le bas si $a < 0$. Le minimum (maximum) est atteint en $-b/2a$.

- **fonction inverse** : $x \rightarrow 1/x$ Son domaine de définition est $\mathbb{R} - \{0\}$. Son graphe (la courbe d'équation $y = 1/x$) est une hyperbole asymptote à la droite $x = 0$ en 0 et à la droite $y = 0$ en $+\infty$ et $-\infty$.

DÉFINITIONS :

- Soit $f : A \rightarrow B$ une fonction. Les antécédents de $y \in B$ (par f) sont toutes les solutions $x \in A$ de l'équation $y = f(x)$. On va ici noter cet ensemble :

$$\text{Ant}_f(y) = \{x \in A : f(x) = y\}.$$

- Une fonction est bijective si pour tout $y \in B$ le nombre d'antécédents vaut 1. On peut dans ce cas définir une application $g : B \rightarrow A$ qui à chaque $y \in B$ associe l'unique antécédent $x = g(y)$. Celle-ci est bien une fonction appelée la fonction réciproque à f , au lycée notée :

$$f^{-1} : B \rightarrow A.$$

PROPOSITION : Si $f : A \rightarrow B$ est bijective, alors f admet une unique fonction réciproque $g : B \rightarrow A$ qui est aussi bijective et pour laquelle on a :

$$\forall x \in A, y \in B : y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y).$$

COMPOSITION DES FONCTIONS :

Étant donné deux fonctions $g : A \rightarrow B$ et $f : B \rightarrow C$ avec la propriété (importante) que l'image de g est contenue dans le domaine de f on a le droit de considérer la composition des deux fonctions. On définit

$$h = f \circ g, \quad \forall x \in A : h(x) = f(g(x)).$$

Exemple : $g : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$, $g(x) = 1 - x^2$ et $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(y) = \sqrt{y}$. La fonction composée $f(g(x)) = \sqrt{1 - x^2}$ est bien définie pour tout $x \in [-1; 1]$.

PROPOSITION : Si $f : A \rightarrow B$ est bijective avec fonction réciproque $g : B \rightarrow A$ on a

$$\forall x \in A : g(f(x)) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in B : f(g(y)) = y.$$

Exemple : Pour $x \geq 0 : \sqrt{x^2} = x$ et pour $y \geq 0 : (\sqrt{y})^2 = y$. On a $\sqrt{16} = 4$ et $16 = 4^2$.

LIMITES Limites finies et infinies, en un point ou en $+\infty$ ou en $-\infty$. Limites à droite, à gauche. Asymptotes horizontales et verticales.

EXEMPLES : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$. (On a le droit. La fraction est une forme déterminée).

La fonction $y = \frac{1}{x-1}$ admet la droite donnée par $x = 1$ comme asymptote verticale (faut voir le graphique).

DÉFINITION : Continuité : f est continue en $x = a$ ssi $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. On peut également définir continuité à droite $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$. et à gauche $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$. .

Soit $A(a; f(a))$ et $B(x; f(x))$ deux points sur le graphe de f . Le taux d'accroissement associé, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, est la pente de la corde entre A et B (ou la droite qui passe par ces deux points).

DÉFINITION : La fonction f est dérivable en $x = a$ ssi la limite suivante existe et qu'elle est finie :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Interprétation géométrique : La tangente du graphe de f en $A(a; f(a))$ est de pente $f'(a)$ et a comme équation : $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

Calcul de dérivées : Soient f et g dérivables sur un intervalle I et λ un réel.

$$(f + g)' = f' + g'; (fg)' = f'g + fg'; (\lambda f)' = \lambda f'; \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2},$$

la dernière formule seulement au points où $g \neq 0$. Si f est dérivable sur un intervalle ouvert J , g est dérivable sur un intervalle ouvert I , $g(I) \subset J$, alors

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) g'(x).$$

EXEMPLE : $(\sin(x^2))' = \sin'(x^2) (x^2)' = \cos(x^2) 2x$.

Les fonctions trigonométriques de base sont définies comme les coordonnées d'un point $M(\cos(t); \sin(t))$ sur le cercle trigonométrique. t est la longueur (avec signe) de l'arc sur le cercle entre M est le point $(1; 0)$. On définit la fonction tangente :

$$\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}, \quad x \in D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Sa dérivée est définie pour tout $t \in D_{\tan}$:

$$\tan'(t) = \left(\frac{\sin(t)}{\cos(t)} \right)' = \frac{\cos^2(t) - \sin(t)(-\sin(t))}{\cos^2(t)} = 1 + \tan^2(t) > 0.$$

On a l'identité remarquable : $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ et les formules additives :

$$\begin{aligned} \cos(s + t) &= \cos(s) \cos(t) - \sin(s) \sin(t), \\ \sin(s + t) &= \sin(s) \cos(t) + \cos(s) \sin(t). \end{aligned}$$

LOGARITHMES : $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ et $\log_{10} : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$. Pour $a, b > 0, p \in \mathbb{R}$, $e = 2, 7128\dots$:

$$\ln(1) = 0, \quad \ln(e) = 1, \quad \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b), \quad \ln(a^p) = p \ln(a), \quad \log_{10}(10^p) = p.$$

$\ln$ est l'unique fonction sur $]0, +\infty[$ qui vérifie : $\ln(1) = 0$ et $\ln'(x) = 1/x$ pour tout $x > 0$.

EXPONENTIELLE : Pour $x, y \in \mathbb{R}$: $e^0 = 1$, $\exp(x) = e^x$, $e^{x+y} = e^x e^y$, $\exp'(x) = \exp(x)$.

Les fonctions $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ et $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ sont fonctions réciproques, une à l'autre.

EXPONENTIELLE COMPLEXE : On définit

$$e^{it} = \cos(t) + i \sin(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

On a : $e^{i0} = e^0 = 1$, $e^{i(s+t)} = e^{is} e^{it}$, $(e^{it})^n = e^{int}$.

Pour tout $z = x + iy$ on pose $e^z = e^x e^{iy}$. On a : $e^{z+w} = e^z e^w$, $z, w \in \mathbb{C}$.

3 Étude des fonctions réelles

- Monotonie et signe de la dérivée : $f' \geq 0$ ssi f est croissante. $f' > 0$ implique f strictement croissante. (pareil pour signe négatif et décroissance).
- Thm des valeurs intermédiaires (**TVI**) : Soit f continue sur l'intervalle I . Alors l'image $f(I)$ est aussi un intervalle.
- Si f est continue sur $[a, b]$ alors f atteint sa valeur maximale et sa valeur minimale.
- Si f est continue et croissante sur l'intervalle $I = [a, b]$ alors l'image de I est l'intervalle $f(I) = [f(a), f(b)]$. De même, si f est continue et décroissante sur I alors l'image $f(I) = [f(b), f(a)]$.
- On appelle c point critique si $f'(c) = 0$. Un extremum (max ou min local) d'une fonction qui est à l'intérieur d'un intervalle est un point critique.
- Thm d'accroissement fini (**TAF**) : Soit f dérivable sur $[a, b]$. Alors il existe $\xi \in]a, b[$ tel que :

$$f(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

- Restriction d'une fonction à un intervalle de monotonie stricte :
Thm : Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui est continue et strictement monotone sur l'intervalle $I \subset A$. Alors $J = f(I)$ est aussi un intervalle, et la restriction $f : I \rightarrow J$ est une bijection, donc possède une fonction réciproque $g : J \rightarrow I$.

La dérivée de la fonction réciproque : Si $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow I$ sont fonctions réciproques et dérivables, alors en $y = f(x)$ on a une formule 'magique'. Pour tout $y \in J$ et $x = g(y) \in I$ on a :

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

- Tableau de Variation (**TdV**). (À priori déjà vu au lycée).

EXEMPLE : Soit $f(x) = x^3 - 3x$. On a $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$ d'où $f'(x) = 0$ ssi $x = -1$ ou $x = 1$. Le TdV associé :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

On a que $f : [-1; 1] \rightarrow [f(1); f(-1)] = [-2; 2]$ est une bijection qui admet donc une fonction réciproque : $g : [-2; 2] \rightarrow [-1; 1]$. Puisque l'image de $x = 0$ est $y = f(0) = 0$ on a : $g'(y = 0) = 1/f'(x = 0) = -1/3$.

EXEMPLE : On a vu que $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) > 0$ quand $\cos(x) <> 0$.

On en déduit que $\tan :]-\pi/2; \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}$ est bijective et admet une fonction réciproque : $\text{Arctan} : \mathbb{R} \rightarrow]-\pi/2; \pi/2[$. Pour sa dérivée en $y = \tan(x)$ on a :

$$\text{Arctan}'(y) = \frac{1}{\tan'(x)} = \frac{1}{1 + \tan^2(x)} = \frac{1}{1 + y^2}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

CONVEXITÉ : Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur l'intervalle I .

1. f est dite convexe ssi pour tout point A, B sur le graphe de f , la corde $[A; B]$ entre les deux points, est au-dessus du graphe de f . f est strictement convexe si la corde est strictement au-dessus du graphe (sauf en A et B).
2. Si f est dérivable, f est convexe ssi le graphe de f est au-dessus de toute ses tangente.
3. Si f est 2 fois dérivable, f est convexe ssi $f'' \geq 0$. Si $f'' > 0$, alors f est strictement convexe.
4. Si $f'(c) = 0$ et $f''(c) > 0$ (resp. < 0), f admet un min (resp. max) local en $x = c$.

4 Intégration

4.1 Rappels

EXEMPLE : Comment calculer l'aire de l'ensemble : $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x^2\}$?

DÉFINITION : - Si $a \leq b$ sont deux réels et f est une fonction réelle continue par morceaux et positive sur $[a, b]$, alors l'aire sous la courbe de f est appelée intégrale de f sur $[a; b]$ et est notée $\int_a^b f(x)dx$.

- Si f est négative sur $[a; b]$ alors on prend le nombre négatif égal à l'opposé de l'aire au-dessus de la courbe - Si f n'est ni négative ni positive, on prend la différence entre les aires sous et au-dessus selon les intervalles où $f \geq 0$ et $f \leq 0$.

REMARQUES :

- Par convention, on écrit : $\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$.

- Dans la notation $\int_a^b f(x)dx$, x est une variable muette : on a $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$.

PROPRIÉTÉS :

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux.

- *Linéarité* : $\int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$.
- *Chasles* : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.
- *Positivité* : si $a \leq b$ et si $f \leq g$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.
- si $a \leq b$, alors $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.
- *Inégalité de la moyenne* : si $|f| \leq M$ sur $[a, b]$, alors on a

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq M|b - a|.$$

4.2 Intégrale et primitive

DÉFINITION : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle primitive de f toute fonction dérivable $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in [a, b]$: $F'(x) = f(x)$.

PROPOSITION : Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$, et F une primitive. Alors

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b.$$

EXEMPLE : $\int_0^2 x^2 dx = [\frac{x^3}{3}]_0^2 = \frac{2^3}{3} - 0 = \frac{8}{3}$. (L'aire de l'exemple au début).

PROPOSITION : Soit f une fonction continue sur l'intervalle I , et soit $a \in I$. Toute primitive de f s'écrit $F(x) = \int_a^x f(t) dt + c$ où $c \in \mathbb{R}$ est une constante arbitraire.

Théorème 1 (Intégration par parties) Si u et v sont deux fonctions ayant des dérivées continues sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx.$$

4.3 Changement de variables

Théorème 2 Soit f une fonction continue sur un intervalle I , ϕ une fonction ayant une dérivée continue sur $[a, b]$ avec $\phi([a, b]) \subset I$. Alors

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\phi(t)) \phi'(t) dt.$$

EXEMPLES :

- Pour calculer $I = \int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt$, on pose $x = \phi(t) = t^2 + 1$ de sorte que

$$I = \int_2^4 \frac{dx}{2\sqrt{x}} = [\sqrt{x}]_2^4 = 2 - \sqrt{2}.$$

- Pour calculer $I = \int_0^T \frac{e^t}{1+e^{2t}} dt$, on pose $x = e^t$ de sorte que

$$I = \int_1^{e^T} \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_1^{e^T} = \arctan(e^T) - \frac{\pi}{4}.$$

4.4 Intégrale sur un intervalle non borné

DÉFINITIONS :

- Si $\int_a^t f(x) dx$ a une limite finie L quand $t \rightarrow +\infty$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ est dite convergente, de valeur L . Sinon elle est dite divergente.
- Si $\int_t^b f(x) dx$ a une limite finie L quand $t \rightarrow -\infty$, l'intégrale $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ est dite convergente, de valeur L . Sinon elle est dite divergente.
- L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ est dite convergente si pour un réel a les intégrales $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ et $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ sont convergentes.

REMARQUE : Si F est une primitive de f , alors $\int_a^t f(x) dx = F(t) - F(a)$. En particulier, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ est convergente si et seulement si $F(t)$ a une limite finie quand t tend vers $+\infty$, et sa valeur est alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) - F(a)$. On note $\int_a^{+\infty} f(x) dx = [F(x)]_a^{+\infty}$.

EXEMPLE : $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$, auquel cas elle vaut $\frac{1}{\alpha - 1}$.

REMARQUE : Si $f \geq 0$, $\int_a^t f(x) dx$ a toujours une limite quand $t \rightarrow +\infty$, mais cette limite peut être infinie. Donc par exemple si $0 \leq f \leq g$ sur $[a, +\infty[$, on a :

- Si $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ est convergente, alors $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ est convergente.
- Si $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ est divergente, alors $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ est divergente.

EXEMPLE : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ est convergente. En effet, pour tout $x \geq 1$, on a $0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}$. Or $\int_1^t e^{-x} dx = e^{-1} - e^{-t}$ tend vers e^{-1} quand $t \rightarrow +\infty$, donc $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ est convergente et donc $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ est convergente. Ainsi,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

est donc aussi convergente. Puis par parité, $\int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx$ est aussi convergente.

5 Équations Différentielles Ordinaires.

Une équation différentielle est une équation où l'inconnue est une fonction qui vérifie une relation qui implique la dérivée de la fonction.

EXEMPLE : Trouver $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $y'(x) = \cos(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Solution (une primitive de $\cos$) : $y(x) = \sin(x) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Pour trouver une solution unique on va rajouter une condition, appelée *condition initiale*. Par ex, $y(\pi/2) = 3$ qui implique $C = 2$ dans l'exemple.

THÉORÈME : Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle I , $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Alors le système d'équations : $y'(t) = f(t)$, $y(t_0) = y_0$ admet comme unique solution :

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(x) dx.$$

THÉORÈME : La solution générale de $y'(t) + ay(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$ s'écrit $y(t) = Ce^{-at}$, $C \in \mathbb{R}$.

THÉORÈME : Le système : $y'(t) + ay(t) = 0$ et $y(t_0) = y_0$ admet comme unique solution : $y(t) = y_0 e^{-a(t-t_0)}$, $t \in \mathbb{R}$.

EXEMPLE : Modèle de population de Malthus : $N'(t) = (\alpha - \beta)N(t)$ avec α et β le taux de natalité et de mortalité, respectivement. Le signe de $\alpha - \beta$ va déterminer le comportement qualitatif de la solution.

EXEMPLE : Equa diff non-homogène (ou avec "membre à droite") : $y'(t) + y(t) = 1 + t^2$.

On appelle $y'(t) + y(t) = 0$ l'équa diff homogène associée.

THÉORÈME : Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Toute solution à l'équa diff :

$$y'(t) + ay(t) = f(t), \quad t \in I \tag{1}$$

s'écrit :

$$y(t) = y_0(t) + Ce^{-at},$$

où y_0 est une solution particulière à (ED) et C une constante (à déterminer si l'on rajoute une condition initiale).

EXEMPLE : On peut 'tatonner' pour trouver une solution particulière. Dans l'ex précédent on peut essayer avec un polynôme de degré 2 : $y_0(t) = at^2 + bt + c$ et on trouve : $y_0(t) = t^2 - 2t + 3$ et donc la solution générale : $y(t) = t^2 - 2t + 3 + Ce^{-t}$.

EXEMPLE : Méthode de variation de la constante : On cherche une solution de la forme $y(t) = C(t)e^{-at}$ (donc la solution au problème homogène mais on laisse la constante varier).

Cela amène à l'équation $C'(t) = f(t)e^{at}$ que l'on peut ensuite essayer d'intégrer.

Avec une condition initiale $y(t_0) = y_0$ on trouve la formule :

$$y(t) = e^{-at} \left(y_0 + \int_{t_0}^t f(x)e^{ax} dx \right). \tag{2}$$

EXEMPLE : Dans l'exemple précédent cette méthode marche mais nécessite deux IPP (intégration par partie).

On peut généraliser avec une fonction a qui dépend de t :

THÉORÈME : Soit $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $A : I \rightarrow \mathbb{R}$ une primitive. La solution générale de $y'(t) + a(t)y(t) = 0$, $t \in I$ est donnée par :

$$y(t) = Ce^{-A(t)}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(on laisse aux lecteurs de vérifier). On peut également rajouter un terme à droite à l'équa diff (cas non-homogène) et utiliser la méthode de la variation de la constante.

5.1 Équation différentielle d'ordre 2

EXEMPLE : $y'' = -g$ (g une constante). Solution $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + at + b$ avec a et b deux constantes. Il faut maintenant deux conditions initiales pour déterminer a et b . Par ex $y(0) = 0$ et $y'(0) = v_0$ donnera $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t$.

EXEMPLE : $y(t) = e^{\lambda t}$, $\lambda \neq 0$, vérifie $y''(t) = \lambda^2 y(t)$ ce qui permet de résoudre l'équa diff $y''(t) - \lambda^2 y(t) = 0$ (voir ci-dessous).

DÉFINITION : On appelle équa diff homogène d'ordre 2 :

$$y''(t) + by'(t) + cy(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R} \quad (3)$$

avec b et c des constantes. On associe à ceci son polynôme caractéristique :

$$P(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + c. \quad (4)$$

PROPOSITION : Si λ_1 et λ_2 sont deux racines réelles distinctes du P , le polynôme caractéristique (4), la solution générale à (3) est :

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Si $\lambda_2 = \lambda_1 \in \mathbb{R}$, la solution générale à (3) est :

$$y(t) = (C_1 + C_2 t) e^{\lambda_1 t}.$$

Si $\lambda_{1,2} = \mu \pm i\omega$ sont deux racines complexes distincte la solution générale à (3) est :

$$y(t) = e^{\mu t} (C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)). \quad (5)$$

Dans les 3 cas, C_1, C_2 sont deux constantes (à déterminer par des conditions initiales).

EXEMPLE : Cas particulier de l'oscillateur harmonique, $\omega \neq 0$: $y''(t) + \omega^2 y(t) = 0$ avec la solution générale :

$$y(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t).$$

EXEMPLE : $y''(t) - 2y'(t) + 10y(t) = 0$.

Polynôme caractéristique : $\lambda^2 - 2\lambda + 10 = (\lambda - 1)^2 + 3^2 = 0$ avec racines : $\lambda = 1 \pm 3i$.

Solution complexes utilisant Euler : $e^{(1 \pm 3i)t} = e^t (\cos(3t) \pm i \sin(3t))$.

Solution générale est en effet une combinaison linéaire de la partie réelle et la partie imaginaire :

$$y(t) = e^t (C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t)).$$

5.2 Séparation de variables : Équation différentielle non-linéaire d'ordre 1.

EXEMPLE : $y'(t) = y(t)^2$, $y(2) = 1$. Méthode : Séparation de variables. Voilà comment on écrit :

$$\frac{dy}{dt} = y^2 \Leftrightarrow \frac{1}{y^2} dy = dt \Leftrightarrow \int \frac{1}{y^2} dy = \int dt \Leftrightarrow -\frac{1}{y} = t + c \Leftrightarrow -\frac{1}{y(t)} = t + c$$

Avec la condition initiale on trouve c : $-\frac{1}{y(2)} = -\frac{1}{1} = 2 + c \Leftrightarrow c = -3$. La solution

$$y(t) = \frac{1}{3-t} \quad (6)$$

L'intervalle maximale de définition sera : $I =]-\infty; 3[$ car ça doit contenir 2 et ne peut pas contenir 3 (car $y(1)$ n'est pas défini).

La méthode marche assez bien pour les équations différentielles de type :

$$\frac{dy}{dt} = y'(t) = \frac{b(t)}{a(y)}, \quad a(t) \neq 0 \quad y(t_0) = y_0.$$

où $b(t)$ est une fonction de t et $a(y)$ une fonction de y qui s'annule pas au voisinage de y_0 .

On fait la séparation des deux variables avec y sur un coté, t sur l'autre :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{b(t)}{a(y)} \Leftrightarrow a(y)dy = b(t)dt \Leftrightarrow \int a(y)dy = \int b(t)dt \Leftrightarrow A(y) = B(t) + c$$

Ici bien entendu A et B sont des primitives de a et b . Avec une condition initiale $y(t_0) = y_0$ on peut trouver $c = A(y_0) - B(t_0)$ (donc facile). C'est ce que l'on a fait dans l'exemple plus haut. Souvent ça bloque ici que l'on n'arrive pas forcément de résoudre (isoler y) pour trouver y en fonction de t . Mais quand ça marche c'est assez impressionnant ce que l'on arrive à résoudre.

6 Approximation, Polynômes de Taylor et DL_n

EXEMPLE : Étant donnée une fonction dérivable $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$, soit le polynôme : $P(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$. Alors, $y = P(x)$ est l'équation de la tangente au graphe de f en $(a; f(a))$. C'est d'une certaine manière la meilleure approximation d'ordre 1 de la fonction f au voisinage de $x = a$.

PROPOSITION : Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (au moins) n fois dérivable, et $a \in I$. Il y a un unique polynôme $P(x) = P_{n,a}(x)$ de degré $n \geq 0$ qui vérifie les équations :

$$P(a) = f(a), P'(a) = f'(a), \dots, P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a),$$

On appelle $P_{n,a}$ le polynôme d'approximation d'ordre n de f en $x = a$ ou bien le polynôme de Taylor d'ordre n en $x = a$ et associé à f . On a la formule explicite suivante :

$$P_{n,a}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n,$$

ou bien

$$P_{n,a}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

Ici le factoriel : $n! = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1$. Ex : $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ et $0! = 1$.

EXEMPLE : $f(x) = \sin(x)$, $n = 5$, $a = 0$: $P_{5,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$. C'est une excellente approximation de $\sin(x)$ quand x est petit.

PROPOSITION : Si f est un polynôme de degré au plus n et $a \in \mathbb{R}$ est arbitraire, alors le polynôme de Taylor associé est comme fonction identique à f .

EXEMPLE : Avec $f(x) = x^2$: $P_{2,a}(x) = a^2 + 2a(x-a) + \frac{1}{2!}2(x-a)^2 = (a + (x-a))^2 = x^2$.

DÉFINITION : On dit que $f(x)$ est une fonction négligeable en $x = a$ si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0.$$

On écrit : $f(x) = \epsilon(x-a)$, lorsque $x-a \rightarrow 0$. On dit aussi que f est une fonction de type 'epsilon' quand x s'approche a . C'est une notation 'dangereuse' car ce qui est contenu dans la 'fonction' epsilon peut varier dans les étapes d'un calcul !

Quelques exemples et règles de calcul :

EXEMPLE : Soit $P(x) = x^2 + x^3$. Alors on a : $P(x) = x^2 + x^2\epsilon(x)$, mais aussi $P(x) = x\epsilon(x)$ ou simplement $P(x) = \epsilon(x)$.

EXEMPLE : $\sin(x) = x + x\epsilon(x)$, autrement dit, la fonction $\frac{\sin(x)-x}{x} = \epsilon(x)$ est une fonction négligeable en zéro. On a en effet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} - 1 = 1 - 1 = 0.$$

EXEMPLE : $x^3 + 2x^4 + x^5 = x^2 \epsilon(x)$, car $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x^4 + x^5}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x^1 + 2x^2 + x^3 = 0$.

EXEMPLE : $(3x + 4x^2 + 3x^3)^2 = 9x^2 + x^2\epsilon(x)$ car le reste est un polynôme qui contient que des puissance de x plus grand que 2. (Essayez de voir pourquoi).

EXEMPLE : $(x + x\epsilon(x))^n = x^n + x^n\epsilon(x)$. Remarque : C'est un abus de notation, car $\epsilon(x)$ représente deux fonctions différentes sur les deux coté de l'égalité.

Théorème 3 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ lisse en $x = a \in I$. Alors,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + (x-a)^n \epsilon(x-a).$$

On dit que l'expression à droite est un $DL_n(a)$ de f ou bien : un développement limité d'ordre n en $x = a$ de $f(x)$.

EXEMPLE : $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^6 \epsilon(x)$ est un $DL_6(0)$ de la fonction sinus.

EXEMPLE : $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2 \epsilon(x)$ (un $DL_2(0)$ de $\sqrt{1+x}$).

EXEMPLE : $\sqrt{t} = 1 + \frac{t-1}{2} - \frac{(t-1)^2}{8} + (t-1)^2 \epsilon(t-1)$ (un $DL_2(1)$ de $\sqrt{t}$ en $t = 1$).

EXEMPLE : $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + x^n \epsilon(x)$.

EXEMPLE : Lorsque $|x| < 1$ la serie suivante converge : $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$.

Par exemple : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

PROPOSITION : Soit $f(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n + o(x^n)$ un $DL_n(0)$ de f . Soit $F = \int f$ la primitive de f qui vérifie $F(0) = 0$. Alors F admet un $DL_{n+1}(0)$:

$$F(x) = c_0 x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 \frac{x^3}{3} + \dots + c_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1} \epsilon(x).$$

Autrement dit, on peut 'intégrer' un DL_n terme par terme.

EXEMPLE : $f(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + x^n \epsilon(x)$. On a $F(x) = \ln(1+x)$ et :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1} \epsilon(x).$$

EXEMPLE : $f(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + x^{2n} \epsilon(x)$. On a $F(x) = \arctan(x)$ et :

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+1} \epsilon(x)$$

EXEMPLE : Calcul des limites. Utilisant le $DL_2(0)$: $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + x^2 \epsilon(x)$ on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2/2 + x^2 \epsilon(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2} + \frac{x^2 \epsilon(x)}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

EXEMPLE : $f(x) = a x^n + x^n \epsilon(x)$, et $g(x) = b x^n + x^n \epsilon(x)$, avec $b \neq 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a + \epsilon(x)}{b + \epsilon(x)} = \frac{a}{b}.$$

Équivalents :

DÉFINITION : Soit f et g deux fonction définies quand $x \rightarrow a$ (mais pas forcément au point $x = a$). On dit que f et g sont équivalent quand $x \rightarrow a$ et on écrit $f \sim_a g$ (ou simplement $f \sim g$) si :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

REMARQUE : On parle souvent d'un équivalent "simple" si l'expression n'a pas d'addition et soustraction et généralement est le plus "simple" possible (à vraie dire, il n'y a pas de définition mathématique).

EXEMPLE : Dans l'exemple juste avant la définition on a : $f \sim ax^n$ et $g \sim bx^m$ (quand $x \rightarrow 0$).

EXEMPLE : Un équivalent simple de $\sqrt{1+x}$ quand $x \rightarrow +\infty$ est $\sqrt{x}$.

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \sim \sqrt{x}, \text{ car pour le rapport entre les deux cotés : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = 1.$$

Série de Taylor : Lorsque on laisse $n \rightarrow +\infty$ le polynôme de Taylor devient une série de Taylor (qui peut converger ou pas) :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

Pour les fonctions exponentielle, sin et cos leur série de Taylor converge (on l'admet) pour tout $x \in \mathbb{R}$ et même pour tout $x \in \mathbb{C}$:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}.$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^m}{m!}.$$

En mettant $x = it$ ($i^2 = -1$ et $t \in \mathbb{R}$) on retrouve :

$$\begin{aligned} e^{it} &= 1 + (it) + \frac{(it)^2}{2!} + \frac{(it)^3}{3!} + \frac{(it)^4}{4!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots \right) + i \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots \right) \\ &= \cos(t) + i \sin(t), \end{aligned}$$

C'est la formule magique d'Euler !

7 Géométrie du plan et fonctions à plusieurs variables

Nous considérons le plan 2-dimensionnel comme représenté par $\mathbb{R}^2$ dans un repérage cartésien. Un point dans le plan est décrit par un couple $(x; y)$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. On associe à deux points $A(x; y)$ et $B(x'; y')$ le *vecteur* entre ces deux points : $\vec{AB} = \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix}$.

On peut ensuite définir somme de vecteurs ainsi que multiplication d'un vecteur par un scalaire, avec des règles de calcul habituelles.

Un repère cartésien (orthonormé) consiste du point d'origine $\mathcal{O}(0; 0)$ et deux vecteurs de base (dite base canonique) :

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs sont unitaires (de longueur 1) et orthogonaux.

Rappelons Pythagore : Le triangle ABC de cotés a, b, c est rectangle en C ssi $c^2 = a^2 + b^2$. Ainsi la longueur d'un vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sera donnée par $\sqrt{a^2 + b^2}$.

DÉFINITIONS : On définit le produit scalaire entre vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

Et ensuite la norme de $\vec{u}$: $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

PROPOSITION : (1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$, (2) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$, (3) $(t\vec{u}) \cdot \vec{v} = t(\vec{u} \cdot \vec{v})$, $t \in \mathbb{R}$.

PROPOSITION : (1) $\|\vec{u}\| \geq 0$, (2) $\|t\vec{u}\| = |t| \|\vec{u}\|$. (3) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

THÉORÈME : (Cauchy-Schwarz) $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$.

THÉORÈME : $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

PROPOSITION : Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Le vecteur $\hat{u} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est orthogonal à u et de même longueur.

DÉFINITION : La distance entre deux points : $d(A, B) = \|\vec{AB}\|$.

DÉFINITION : Soit $C(a; b) \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$. Le cercle de centre C et rayon $r > 0$ est $\mathcal{C} = \{M(x; y) : d(M, C) = r\}$. On a l'équation du cercle :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

PROPOSITION : Distance d'un point $M(x_0; y_0)$ à une droite $D = \{(x, y) : ax + by + c = 0\}$:

$$d(M, D) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

(NB : Il est plus important de savoir comment trouver la formule que de la rappeler par coeur).

PROPOSITION : Soit $\vec{u} \neq \vec{0}$. Pour tout vecteur $\vec{v}$ il y a un unique vecteur $\vec{w} \parallel \vec{u}$ t.q $\vec{v} - \vec{w} \perp \vec{u}$. On appelle $\vec{w}$ la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur (la droite engendré par) $\vec{u}$ et on a la formule :

$$\vec{w} = \vec{u} \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}.$$

Lorsque $\|\vec{u}\| = 1$ la formule devient plus simple : $\vec{w} = \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{v})$.

Trigonométrie : Lorsque $M(\cos t; \sin t)$ est un point sur le cercle unité on peut écrire (dans la base canonique) :

$$\vec{OM} = \cos(t) \vec{e}_1 + \sin(t) \vec{e}_2.$$

Si $\vec{e} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est unitaire, $\hat{e} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est son orthogonal (voir plus haut) et $M(c; d)$ est un point sur le cercle unité, on a $\vec{v} = \vec{OM} = \cos(t) \vec{e} + \sin(t) \hat{e}$ avec t l'angle (avec signe) entre $\vec{e}$ et $\vec{v}$. En prenant produit scalaire on trouve :

$$\cos(t) = \vec{e} \cdot \vec{v} = ac + bd, \quad (7)$$

$$\sin(t) = \hat{e} \cdot \vec{v} = ad - bc. \quad (8)$$

On a pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et l'angle t entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(t). \\ \widehat{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(t).\end{aligned}$$

L'aire (avec signe) du triangle engendré par ces deux vecteurs : $\frac{1}{2} \widehat{u} \cdot \vec{v}$.

Soit $M(x_0; y_0)$ un point sur le cercle donné par l'équation : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. L'équation de la tangente en M est donnée par : $(x - a)(x_0 - a) + (y - b)(y_0 - b) = 0$.

COORDONNÉES POLAIRES : La relation entre coordonnées cartésiennes (x, y) et coordonnées polaires (r, θ) est donnée par

$$x = r \cos \theta \quad \text{et} \quad y = r \sin \theta. \quad (9)$$

Lorsque $r \geq 0$ on a : $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Pour trouver θ on peut résoudre $\tan \theta = \frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} = y/x$ mais la solution n'est pas unique (déterminée à un multiple de π près sauf si $r = 0$ et θ est arbitraire).

EXEMPLE : Une droite d'équation $ax + by + c = 0$ peut en coordonnées polaires s'écrire $ar \cos \theta + br \sin \theta + c = 0$ ou :

$$r = \frac{-c}{a \cos \theta + b \sin \theta}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

(Mais attention : le dénominateur s'annule pour certaines valeur de θ).

8 Fonctions à plusieurs variables et géométrie dans l'espace

DÉFINITIONS : Une courbe paramétrée (aussi appelé un chemin ou une trajectoire) dans le plan est une application de $t \in I$ (intervalle de 'temps') vers la position $M(t) = (x(t); y(t)) \in \mathbb{R}^2$. Sauf exception, on va ici supposer $x(t)$ et $y(t)$ continues et infiniment dérivables en t . On décrit aussi la courbe de façon vectorielle :

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad t \in I. \quad (10)$$

$\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ et $\vec{r}''(t) = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$ sont les vecteurs vitesse et accélération, respectivement.

EXEMPLE : $x(t) = r \cos(t)$, $y(t) = r \sin(t)$ décrit un mouvement régulier sur un cercle centré à l'origine et de rayon $r > 0$.

DÉFINITIONS : Une fonction à deux variables f est la donnée de :

1. Un domaine de définition, ici $D_f \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
2. Un espace d'image, ici $\mathbb{R}$.
3. Une application $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ qui à $(x, y) \in D$ associé un élément $f(x, y) \in \mathbb{R}$.

EXEMPLE : $f(x, y) = \frac{xy}{1 + y^2}$ est une application de deux variables. Par exemple, $f(3, 7) = \frac{21}{50}$.

EXEMPLE : $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x - y}}$ est une application de deux variables mais elle n'est pas définie partout. Comme pour les fonctions de une variable, on a la notion de *domaine de définition*. Ici c'est

l'ensemble des points (x, y) tels que $x > y$.

DÉFINITIONS : Si f est une fonction de 2 variables et h est un nombre réel, la ligne de niveau de hauteur h est l'ensemble de points (x, y) du domaine de définition de f tels que $f(x, y) = h$:

$$\mathcal{L}_h = \{(x, y) \in D_f : f(x, y) = h\}.$$

EXEMPLE : La ligne de niveau de hauteur 1 de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ est le cercle de rayon 1, celle de hauteur 4 le cercle de rayon 2. On peut observer que f est constante le long le mouvement circulaire décrit en haut, $f(r \cos(t), r \sin(t)) = r^2$.

DÉFINITIONS : Si f est une fonction de 2 variables et (a, b) est un élément de son domaine de définition, on appelle fonction partielles en (a, b) les deux fonctions de 1 variable :

$$f_1 : x \rightarrow f(x, b) \text{ et } f_2 : y \rightarrow f(a, y).$$

EXEMPLE : Au point $(1, 2)$, les fonctions partielles de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ sont $f_1(x) = f(x, 2) = x^2 + 4$ et $f_2(y) = f(1, y) = 1 + y^2$.

8.1 Dérivées partielles

Étant donné une fonction de plusieurs variables on obtient une fonction d'une variable si l'on fixe les valeurs des autres.

DÉFINITIONS : Soit f une fonction de 2 variables définie autour d'un point (a, b) . On appelle fonctions partielles en ce point les deux fonctions d'une variable : $f_1(x) = f(x, b)$ et $f_2(y) = f(a, y)$, qui sont définies autour de $x = a$ et $y = b$, respectivement.

On appelle dérivées partielles de $f(x, y)$ au point (a, b) les deux quantités :

$$\frac{\partial}{\partial x} f(a, b) = f'_1(a) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial y} f(a, b) = f'_2(b).$$

REMARQUE : Les dérivées partielles n'existent pas toujours.

EXEMPLE : Soit $f(x, y) = x^2 y^3$. Au point (a, b) , les dérivées partielles sont

$$\frac{\partial}{\partial x} f(a, b) = 2ab^3 \text{ et } \frac{\partial}{\partial y} f(a, b) = 3a^2 b^2.$$

De façon plus courte on écrit : $\frac{\partial}{\partial x} f = 2xy^3$ et $\frac{\partial}{\partial y} f = 3x^2 y^2$. Quand on dérive par rapport à x on traite y comme une constante, et quand on dérive par rapport à y on traite x comme une constante.

DÉFINITION : On appelle gradient de f en (x, y) le vecteur :

$$\vec{\nabla} f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f \\ \frac{\partial}{\partial y} f \end{pmatrix}.$$

Tout comme pour les fonctions d'une seule variable, la notion de dérivation est utile pour localiser les extrema d'une fonction.

DÉFINITIONS :

1. On dit que f atteint son maximum au point (a, b) si pour tout (x, y) dans le domaine de définition de f , $f(x, y) \leq f(a, b)$ (le maximum est dit strict si cette inégalité est stricte). Le maximum de f vaut alors $f(a, b)$.
2. On dit que f atteint son minimum au point (a, b) si pour tout (x, y) dans le domaine de définition de f , $f(x, y) \geq f(a, b)$ (le minimum est dit strict si cette inégalité est stricte). Le minimum de f vaut alors $f(a, b)$.
3. On dit que f a un point critique en (a, b) si f admet des dérivées partielles en (a, b) et que :

$$\frac{\partial}{\partial x} f(a, b) = \frac{\partial}{\partial y} f(a, b) = 0.$$

On a alors un résultat analogue au fait qu'une fonction d'une variable atteint ses extrema là où sa dérivée s'annule :

Théorème 4 *Si f atteint son maximum (ou son minimum) en (a, b) et que f a des dérivées partielles en (a, b) alors (a, b) est un point critique.*

REMARQUE : Un point critique n'est pas nécessairement un extrema (maximum ou minimum) d'une fonction mais si on est à la recherche d'un extrema et que la fonction a des dérivées partielles partout alors on peut se contenter de les rechercher parmi les points critiques.

EXEMPLE : La fonction $f(x, y) = x^3$ a pour domaine de définition $\mathbb{R}^2$. Ses points critiques sont ceux de la forme $(0, y)$ mais cette fonction n'atteint pas ses extrema.

EXEMPLE : La fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ a pour unique point critique le point $(0, 0)$ on vérifie aisément que c'est le minimum de la fonction.

DÉFINITION : Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine dans le plan. Un champ de vecteurs (sur D) est une application qui à tout $(x, y) \in D$ associe un vecteur $\vec{v}(x, y)$.

EXEMPLE : Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction définie sur D son gradient $\vec{\nabla} f$ définit un champ de vecteurs sur D , appelé champ du gradient.

8.2 Accroissements

Rappel : Avec la fonction $y = f(x) = x^2$, on calcule l'accroissement quand x change en $x + \Delta x$ (en effet il s'agit d'un développement limité d'ordre un en x) :

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 = 2x\Delta x + \Delta x \epsilon(\Delta x).$$

Donc au 1er ordre en Δx on a : $\Delta y \approx 2x\Delta x = f'(x)\Delta x$.

Pour une fonction à 2 variables $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ et accroissements Δx et Δy on a

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = 2x\Delta x + 2y\Delta y + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \approx 2x\Delta x + 2y\Delta y.$$

La formule générale pour f dérivable :

$$\Delta z \approx \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y = \vec{\nabla} f \cdot \Delta \vec{r} \quad \text{avec} \quad \Delta \vec{r} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}.$$

PROPOSITION : Soit $M(x_0, y_0)$ un point tel que le gradient de f en ce point est non-nul. Alors le plan tangent du graphe de f en M admet comme équation :

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) (y - y_0).$$

EXEMPLE : Le graphe de $f(x, y) = x^2 + y^2$ admet un plan tangent en $M(2; 3)$ décrit par l'équation : $z = 4(x - 2) + 6(y - 3)$.

PROPOSITION :

Lorsque $x = x(t)$ et $y = y(t)$ (avec $t \in I$ un intervalle) sont dérivable on a :
 $\Delta z \approx \frac{\partial f}{\partial x} x'(t) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t) \Delta t$, ce qui donne :

PROPOSITION : La formule pour la dérivée composée le long d'une courbe paramétrée :

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \vec{r}'(t) \cdot \vec{\nabla} f(\vec{r}(t)). \quad (11)$$

On peut comparer avec la dérivée habituelle d'une fonction composée d'une variable :

$$\frac{d}{dt} f(x(t)) = \frac{df}{dx}(x(t)) \times \frac{dx}{dt} = f'(x(t)) x'(t).$$

En particulier la dérivée (directionnelle) de f dans la direction $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$:

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(x_0 + at, y_0 + bt) = a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \vec{\nabla} f(x_0, y_0).$$

PROPOSITION : Les lignes de niveau de $f(x, y)$ sont orthogonales au champ du gradient de f .

Démo : Un chemin $(x(t); y(t))$, $t \in I$ sur la ligne de niveau $L_{f=h}$ vérifie $f(x(t), y(t)) = h$ (constante).
D'où $0 = \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \vec{r}'(t) \cdot \vec{\nabla} f$. Donc, $\vec{r}'(t) \perp \vec{\nabla} f$.

EXEMPLE : Pour le mouvement circulaire décrit en haut, on a

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \vec{r}'(t) \cdot \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} -r \sin(t) \\ r \cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \cos(t) \\ r \sin(t) \end{pmatrix} = 0,$$

et f est bien constante le long la trajectoire.

PROPOSITION : Soit L la ligne de niveau qui passe par le point $M(x_0; y_0)$. Si le gradient en ce point est non-nul, la tangente de L en ce point admet comme équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) (y - y_0) = 0.$$

EXEMPLE : Le gradient de $f(x, y) = xy^2$ est donné par : $\vec{\nabla} f(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$. Soit $M(2; 1)$ un point et $h = f(2, 1) = 2$ la valeur de f en ce point. Le ligne de niveau L_2 de f qui passe par M est décrite par l'équation $L_2 = \{(x, y) \mid xy^2 = 2\}$ et le gradient en M : $\vec{\nabla} f(2, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. La tangente de L_2 en M admet donc comme équation :

$$(x - 2) + 4(y - 1) = 0.$$

A Quelques formules et propriétés, utiles à connaître.

Dérivées f' et primitives F élémentaires : (Attention à vérifier le domaine de validité).
Pour tout réel α ,

$f(x)$	$f'(x)$	$F(x)$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ si $\alpha + 1 \neq 0$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{2}{3}x^{3/2}$
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x + C$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$-\ln \cos x + C$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	
$e^{\alpha x}$	$\alpha e^{\alpha x}$	$\frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + C$ si $\alpha \neq 0$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\ln x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$	$\arctan x + C$

Composition de limites :

$\lim f$	$\lim g$	$\lim(f+g)$	$\lim(fg)$
$l \in \mathbb{R}$	$m \in \mathbb{R}$	$l+m$	lm
$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$\begin{cases} +\infty & \text{si } l > 0 \\ -\infty & \text{si } l < 0 \\ ?? & \text{si } l = 0 \end{cases}$
$l \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$-\infty$	$\begin{cases} -\infty & \text{si } l > 0 \\ +\infty & \text{si } l < 0 \\ ?? & \text{si } l = 0 \end{cases}$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$??$	$-\infty$

Croissances comparées : si $\alpha > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0^+; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0^-; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0^+;$$

Fonction puissance : pour $x > 0$ et α, β réels, on a $\frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}$, $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.

Logarithme : Pour $x, y > 0$ et $p \in \mathbb{R}$: $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$, $\ln(x^p) = p \ln(x)$.