L1S1 PCST | Orsay jan 2025
Calculus | **Durée 2h**

Documents et téléphones sont interdits. Une calculatrice type collège est permise.
Justifier vos réponses.

Exercice 1 - Simplifier autant que possible (i est l'unité imaginaire) :

$$(\mathbf{a}) \quad \frac{\sqrt{4} \times \sqrt{14}}{\sqrt{8}}, \qquad (\mathbf{b}) \quad \frac{a^2+b^2}{ia+b}, \qquad (\mathbf{c}) \quad \frac{\exp(1+\ln(14))}{\exp(\ln(7))}.$$

Exercice 2 - Trouver la valeur maximale de : $x\,\exp(-x^2/2)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 - On considère l'équation différentielle : $y''(t) = -g$ avec $g > 0$ une constante.

1. Déterminer la solution générale.
2. Déterminer la solution particulière avec les conditions initiale : $y(0) = 0$ et $y'(0) = v_0 > 0$.
   (a) Pour cette solution particulière, quelle est la valeur maximale de $y(t)$? (en fonction de v_0 et g)
   (b) Et quelle est la valeur minimale de $T > 0$ telle que $y(T) = 0$?

Exercice 4 - On considère l'équation différentielle : $y''(t) + y(t) = -g$ avec $g > 0$ une constante et les conditions initiales : $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

1. Déterminer la solution avec les conditions initiales. (Indication : Pour la solution générale, on pourra 'deviner' une solution particulière et y rajouter la solution de l'équation homogène associée).
2. Déterminer la valeur minimale de $T > 0$ telle que $y(T) = 0$ et $y'(T) = 0$.

Exercice 5 - Calculer les limites (avec $a \in \mathbb{R}$) de : $(\mathbf{a}) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+ax)}{x}, \qquad (\mathbf{b}) \quad \lim_{N\to+\infty} \left(1+\frac{a}{N}\right)^N.$

Exercice 6 - Soit $f(x) = \frac{3x}{\exp(x)-1}, \quad x \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

1. Déterminer la limite $\lim_{x\to 0} f(x)$.
2. Calculer $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}^*$ et déterminer la limite $\lim_{x\to 0} f'(x)$.

Exercice 7 - Soit $f(x,y) = x^2+4y^2$. On considère la courbe de niveau : $\mathcal{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+4y^2 = 5\}$.

1. Calculer le gradient de $f(x,y)$ au point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2. Soit T_Q la tangente de $\mathcal{E}$ en $Q(1;1)$. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ est orthogonal à T_Q.
3. Donner une équation cartésienne de T_Q et déterminer les intersections $(a,0)$ et $(0,b)$ avec les deux axes.
4. (*) Soit $P(x_0;y_0) \in \mathcal{E}$ et T_P la tangente de $\mathcal{E}$ en P.
   On suppose que T_P intersecte les deux axes en $(c,0)$ et $(0,c)$, respectivement et avec $c > 0$. Déterminer la valeur de c.