L1S1 PCST — ORSAY JAN 2024

CALCULUS — **Durée 2h**

Documents, calculatrices et téléphones sont interdits. **Justifier vos réponses.**

Exercice 1 - Simplifier autant que possible (i est l'unité imaginaire) :

$$(\mathbf{a})\quad \frac{3}{13}\Big/\frac{21}{26}\ ,\qquad (\mathbf{b})\quad (1+i)^6\ ,\qquad (\mathbf{c})\quad \frac{\ln(9)+\ln(27)}{7\ln(3)}.$$

Exercice 2 - Calculer la dérivée de : $(\mathbf{a})\quad x^2e^{-3x},\qquad (\mathbf{b})\quad \dfrac{\sin(x^3)}{x^2}.$

Exercice 3 - Calculer : $(\mathbf{a})\quad \displaystyle\int_0^1 x^2\,dx,\qquad (\mathbf{b})\quad \int_1^2 \sqrt{1+x^2}\;x\,dx.$

Exercice 4 - Résoudre (en fonction du temps t) les équations différentielles suivantes :

1. $y'(t)+3y(t)=0$ avec condition initiale $y(0)=5$.
2. $y''(t)+4y(t)=t$ avec condition initiale $y(0)=0,\ \ y'(0)=1$.
3. $y'(t)=\dfrac{t}{y(t)}$ avec condition initiale $y(0)=-1$.

Exercice 5 - Calculuer les limites : $(\mathbf{a})\quad \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi x)}{2x},\qquad (\mathbf{b})\quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2(1-\exp(2x))}{x-\sin(x)}.$

Exercice 6 - Soit $(\mathcal{O};\vec{i},\vec{j})$ un repère cartesien standard du plan et $(x;y)$ les coordonnées dans ce repère. Soit $\vec{d}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ un vecteur directeur pour la droite $\mathcal{D}$ qui passe par $A(2;1)$.

1. Déterminer une équation pour $\mathcal{D}$.
2. Soit $\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}=\vec{u}+\vec{v}$ avec $\vec{u}\parallel\vec{d}$ et $\vec{v}\perp\vec{d}$. Déterminer les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
3. Déterminer la distance entre $B(4;0)$ et la droite $\mathcal{D}$.

Exercice 7 - Soit $f(x,y)\ =\frac{1}{2}y^2-\cos(x)$.

1. Déterminer les dérivées partielles de $f(x,y)$.
2. Soient $(x(t);y(t))$, $t\in\mathbb{R}$ une trajectoire (dérivable) dans le plan.
   Exprimer $\dfrac{d}{dt}f(x(t),y(t))$ à l'aide des dérivées partielles de $f(x,y)$ et le vecteur vitesse du trajectoire.
3. Supposons que pour tout $t\in\mathbb{R}$ on a : $x'(t)=a\ y(t)$ et $y'(t)=b\ \sin(x(t))$, avec $a,b\in\mathbb{R}$.
   Si f est invariante le long la trajectoire, quelle est la relation entre a et b ?