L1S1 PCST — Documents et Mobiles interdits — Orsay Nov 2024

Calculus — Calculette non-programmable, non-graphique permise. **Durée 1h30**

Justifier vos calculs.

Exercice 1 - Résoudre dans $\mathbb{R}$:

(**a**) $6+3x=4(3-x)$, (**b**) $\dfrac{2}{y+1}=\dfrac{y+1}{2}$, (**c**) $z(z-1)(2+z)=0$.

Exercice 2 - Simplifier autant que possible (i est l'unité imaginaire) :

(**a**) $\dfrac{a^2\,c}{(a\,/\,c)^3}$, (**b**) $\exp\left(2\;\ln\left(3\,a\right)\right)$, (**c**) $(1+2i)^2$, (**d**) $\dfrac{4-2i}{3+i}$.

Exercice 3 - Déterminer le domaine de définition et calculer la dérivée de chaque expression (en fonction de x sur son domaine de définition) :

(**a**) $x^3+\ln(ax)$, (**b**) $\dfrac{x}{\sin(ax)}$, (**c**) $\sqrt{a+x^2}$.

Exercice 4 - On étudie la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x^4}{4}-2x^2$.

1. Calculer la dérivée de f et établir un tableau de variation.
(Indication : La dérivée de f se factorise facilement).

2. Déterminer les intervalles de monotonicité (où f est croissante, respectivement décroissante).

3. Esquisser le graphe de f.

4. Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f en $(3, f(3))$.

5. Montrer que f définit une bijection de $I=[2,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

6. Soit $g: J\to I$ la fonction réciproque de $f: I\to J$. Calculer la dérivée de $g(y)$ en $y=\dfrac{9}{4}=2,25$.

7. Question bonus [mais chronophage !] : Que vaut $g'(0)$?

Exercice 5 - On considère un repère orthonormé dans le plan $\mathbb{R}^2$ avec coordonnées (x,y). Soit $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ un vecteur, et $Q(3;4)$ et $P(-1;1)$ deux points dans le plan. On note D la droite qui passe par Q et qui est orthogonale à $\vec{n}$.

1. Déterminer la distance entre Q et P.

2. Déterminer une équation cartésienne de la droite D.

3. Déterminer la distance entre P et la droite D.