Corrigé

Dérivées partielles

1) Calculer la différentielle totale de

$E_m = E_c + E_p$ sachant que $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ et

$E_p = mgh$.

$$\boxed{dE_m = mvdv + mgdh}$$

2) Une mole de gaz de Van der Waals a pour

équation d'état : $\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$

où P,V et T sont respectivement la pression,

le volume molaire et la température du gaz.

R est la constante des gaz parfaits,

a le terme de cohésion (constant),

b le covolume molaire (constant). Ces deux

derniers paramètres rendent compte pour a,

que les molécules interagissent entre elles,

et pour b, que leur volume est fini.

Exprimer P en fonction de T et V et calculer les dérivées partielles : $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$ et $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$.

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -\frac{RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{R}{V-b}$$

Gradient d'une fonction scalaire

1) Sur le graphe de la fonction $f(x,y) = xy$, 1, 5 et 10 sont indiqués.
A quoi correspondent-ils ?

Ce sont les valeurs de f pour 3 courbes d'isovaleur ou courbes de niveau.

Donner quelques couples (x,y) correspondant.

$xy = 1$ pour $(1,1)$; $xy = 5$ pour $(1,5)$ et $(5,1)$;
$xy = 10$ pour $(2,5)$ et $(5,2)$ ou $(1,10)$

Calculer le gradient de $f(x, y)$.

$$\boxed{\overrightarrow{grad}f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} = y\vec{\imath} + x\vec{\jmath}}$$

Calculer sa valeur (sa norme) en deux points de la courbe de niveau 10.
Conclusion.

$$\left\|\overrightarrow{grad}f(x, y)\right\| = \sqrt{y^2 + x^2}$$

Pour $xy = 10$, on choisit deux couples (x, y) : $(2,5)$ et $(1,10)$:

$$\left\|\overrightarrow{grad}f(2,5)\right\| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29} = 5,4$$

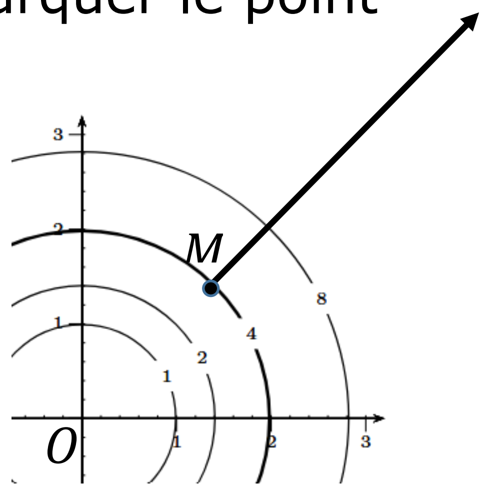
$$\left\|\overrightarrow{grad}f(1,10)\right\| = \sqrt{1^2 + 10^2} = \sqrt{101} = 10,0$$

On peut dire que la pente ou la variation de f est deux fois plus forte en (1,10) qu'en (2,5), ce qui est visible par l'écartement des courbes de niveau qui est plus important en (2,5) qu'en (1,10).

2) Sur le graphe ci-contre, marquer le point M de coordonnées $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Quelle est l'équation de la courbe de niveau de $f(x, y) = x^2 + y^2$ passant par ce point ?

Quelle forme a cette courbe ?



L'équation de la courbe de niveau de f passant par M est

$f(x, y) = f(M) = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 4$

soit $x^2 + y^2 = 4$

On remarque qu'il s'agit de cercle de rayon $R = \sqrt{x^2 + y^2}$, ici $R = 2$

Calculer le vecteur gradient en ce point et tracer ce vecteur sur la figure. Qu'observez-vous ?

$$\overrightarrow{grad}f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j}$$

$$\overrightarrow{grad}f(M) = 2\sqrt{2}\vec{i} + 2\sqrt{2}\vec{j} = 2\overrightarrow{OM}$$

On remarque que ce vecteur gradient est perpendiculaire en M à la courbe de niveau et dirigé dans le sens des niveaux croissants.