Corrigé du partiel L1 Calculus Renforcé

Ex 1. 1) $mn/(m+n)^2 > 0$ quand $m, n > 0$ est clair, il s'agit donc de montrer que $4mn \leq (m+n)^2$. On a $(m-n)^2 \geq 0$, donc $2mn \leq m^2+n^2$, soit $4mn \leq m^2+n^2+2mn = (m+n)^2$. L'ensemble est borné comme on a ainsi trouvé une borne supérieure 1/4 et une borne inférieure 0.

2) La borne supérieure 1/4 est atteinte : en effet pour $m = n$ l'expression vaut 1/4. C'est donc $max(A)$ et $sup(A)$. Montrons que 0 est $inf(A)$: pour cela fixons $m = 1$, notre expression $mn/(m+n)^2$ vaut alors $n/(n+1)^2$. Lorsque n devient grand celui-ci est arbitrairement proche de 0, donc 0 est $inf(A)$ et A n'admet pas de minimum.

Ex 2. 1) f est continue sur $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$ puisque les fonctions $sin(\pi x)+1$ et $(x-2)^2$ y sont continues. Elle est aussi continue en 1 comme sa limite lorsque $x \to 1^+$ est celle de $(x-2)^2$ donc 1, et sa limite lorsque x tend vers 1^- est celle de $sin(\pi x)+1$, soit 1. La limite de la fonction lorsque x tend vers 1 est donc égale à $f(1) = 1$.

2) par contre la dérivée de $(x-2)^2$ étant $2(x-2)$ et celle de $sin(\pi x)+1$ étant $\pi\cos(\pi x)$, on obtient $\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 2(1-2) = -2$, $\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \pi\cos\pi = -\pi$. Ces limites sont différentes, donc il n'existe pas de $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$, autrement dit la fonction n'est pas dérivable en 1.

Ex 3. On calcule le module qui est égal à 4, donc $z = 4(-1/2+i\sqrt{3}/2) = 4e^{2\pi i/3}$. Les racines carrées sont $v_1 = 2e^{\pi i/3}$ et $v_2 = -2e^{\pi i/3}$ (ou, sous la forme exponentielle, $v_2 = 2e^{4\pi i/3}$: c'est la même chose).

Pour trouver les u_i on extrait les racines carrées de v_i, obtenant $u_1, u_2 = \pm\sqrt{2}e^{\pi i/6}$ et $u_3, u_4 = \pm\sqrt{2}e^{2\pi i/3}$. Sous forme cartesienne $e^{\pi i/6} = cos(\pi/6) + isin(\pi/6) = \sqrt{3}/2 + i/2$, on obtient $u_{1,2} = \pm(\sqrt{3/2} + i/\sqrt{2})$. De même, $u_{3,4} = \pm\sqrt{2}(-1/2+i\sqrt{3}/2) = \pm(-1/\sqrt{2}+i\sqrt{3/2})$.

Remarque : on peut aussi noter que $i^4 = 1$, donc, après avoir trouvé u_1 on en obtient les autres u_i en multipliant par i, $i^2 = -1$ et $i^3 = -i$ (cela ne change pas la puissance 4e).

Ex 4. On a besoin des DL à l'ordre 2. Celui de $\ln(1+x)$ en 0 est $x - x^2/2 + x^2\epsilon(x)$, celui de $\sin y$ en 0 est $y + y^2\epsilon(y)$. Donc par substitution $\sin(\ln(1+x)) = x - x^2/2 + x^2\epsilon(x)$. De même, $\cos x = 1 - x^2/2 + x^2\epsilon(x)$, soit $\ln\cos(x) = \ln(1-x^2/2+\dots) = -x^2/2 + x^2\epsilon(x)$. La première limite aboutit à celle de $\frac{x}{-x^2/2}$ quand x tend vers 0^+ : c'est $-\infty$. La seconde est la même que celle de $\frac{x^2}{-x^2/2}$, donc -2.

Ex 5. 1) On peut dire que les fonctions $\sin(x)$ et $\cos(x)$, étant périodiques non-constantes, n'ont pas de limite quand $x \to +\infty$, donc $\sin(1/x)$ et $\cos(1/x)$

n'ont pas de limite quand $x \to 0$. Ou (mieux encore) exhiber deux suites (a_n) et (b_n) tendant vers 0 et telles que $\sin(1/a_n)$ n'a pas la même limite que $\sin(1/b_n)$, par exemple $a_n = \frac{1}{2\pi n}$, $b_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$.

2) La dérivée en 0 est, par définition, $\lim_{x\to 0} \frac{x^3 \sin(x^{-1}) - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x^2 \sin(x^{-1}) = 0$ (on sait que le produit d'une fonction tendant vers 0, ici x^2, et d'une fonction bornée, ici $\sin(x^{-1})$, tend vers 0 : on utilisera cette remarque dans la suite sans le dire).

3) La dérivée en $x \neq 0$ est $3x^2 \sin(x^{-1}) + x^3(\sin(x^{-1}))' = 3x^2 \sin(x^{-1}) - x\cos(x^{-1})$.

4) La dérivée seconde est la dérivée de f', soit de la fonction qui est égale à $3x^2 \sin(x^{-1}) - x\cos(x^{-1})$ pour $x \neq 0$ et vaut 0 pour $x = 0$. Par définition, la dérivée seconde en zéro serait $\lim_{x\to 0} \frac{3x^2 \sin(x^{-1}) - x\cos(x^{-1}) - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} 3x \sin(x^{-1}) - \cos(x^{-1}) = -\lim_{x\to 0} \cos(x^{-1})$, mais ce dernier n'existe pas.

5) Oui, le DL est $f(x) = 0 + x^2 \epsilon(x)$, puisque $x \sin(x^{-1})$ tend vers 0 quand x tend vers 0.