Ex.1 1) Eq. caractéristique $r^2 - 2r + 5 = 0$ a deux racines complexes : $r_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = 1 \pm 2i$. Les solutions sont donc $e^t(A\cos 2t + B\sin 2t)$, $A, B \in \mathbb{R}$.

2) Principe de superposition : à une solution générale de l'équation homogène, on ajoute une solution particulière de l'équation avec 2nd membre. On cherche cette dernière sous la forme $y = A\cos t + B\sin t$ (A, B à déterminer). On a $y' = -A\sin t + B\cos t$, $y'' = -A\cos t - B\sin t$, soit

$$-A\cos t - B\sin t - 2(-A\sin t + B\cos t) + 5(A\cos t + B\sin t) = \cos t.$$

Soit $(4A-2B)\cos t + (2A+4B)\sin t = \cos t$.

On cherche donc A, B tels que $\begin{cases} 4A-2B = 1 \\ 2A+4B = 0 \end{cases}$

D'où $A = -2B$, $-10B = 1 \Leftrightarrow B = -\frac{1}{10}$, $A = \frac{1}{5}$.

La solution générale est donc

$$y(t) = e^t(A\cos 2t + B\sin 2t) + \frac{1}{5}\cos t - \frac{1}{10}\sin t.$$

3) Principe de superposition : à la solution générale de l'équation homogène, on ajoute deux solutions particulières, une pour chaque 2nd membre. On trouve celle de $y'' - 2y' + 5y = e^{2t}$: on cherche sous la forme Ce^{2t} ce qui donne

$$4Ce^{2t} - 4Ce^{2t} + 5Ce^{2t} = e^{2t},$$ d'où $C = \frac{1}{5}$. On obtient donc

$$y(t) = e^t(A\cos 2t + B\sin 2t) + \frac{1}{5}\cos t - \frac{1}{10}\sin t + \frac{1}{5}e^{2t}.$$

Ex 2. 1) $(\sinh(x))' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh(x)$. On constate que $(\sinh(x))' > 0$ $\forall x$, donc $\sinh$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

2) La formule de Taylor-Lagrange est (en 0 pour f quelconque)

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f''''(0)}{4!}x^4 + f^{(5)}(c)\frac{x^5}{5!},$$

avec c entre 0 et x. On a $(\cosh(x))' = \sinh(x)$
$(\cosh(x))'' = \cosh(x)$ $(\cosh(x))'''(x) = \sinh(x)$, etc.
en calculant la valeur en 0, on obtient

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \sinh(c) \cdot \frac{x^5}{5!}$$

3) On a $0 \leq c \leq x$ et sinh croissante,
donc $0 \leq \sinh(c) \leq \sinh(x)$, d'où le résultat.

Ex. 3 1) On intègre 2 fois par parties :

$$\int_0^1 \sin t \, de^t = [\sin t \, e^t]_0^1 - \int_0^1 e^t d\sin t = e \cdot \sin 1 - \int_0^1 e^t \cos t \, dt =$$

$$= e \cdot \sin 1 - \int_0^1 \cos t \, de^t = e\sin 1 - \left([e^t \cos t]_0^1 - \int_0^1 e^t d\cos t \right) =$$

$$= e \sin 1 - (e\cos 1 - 1) - \int_0^1 e^t \sin t \, dt.$$

Ainsi, $2\int_0^1 e^t \sin t \, dt = e\sin 1 - e\cos 1 + 1$

$$\int_0^1 e^t \sin t \, dt = \frac{e\sin 1 - e\cos 1 + 1}{2}.$$

2) On fait le changement de variables
$x = e^t$, ainsi $\int_1^e \sin(\ln x) dx = \int_0^1 \sin t \cdot e^t dt$
donc la valeur de l'intégrale est la même.

Ex. 4 1) Pour $(x,y) \neq (0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y \cdot (x^2+y^2) - xy \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} =$

$= \frac{y^3 - yx^2}{(x^2+y^2)^2}$. De même, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2}$.

2) Pour $y = 0$, la fonction $f(x,0)$ est
identiquement nulle, donc sa dérivée $\frac{\partial f}{\partial x}$ est nulle
aussi (attention : il ne suffit pas de dire

que la valeur $f(0,0)$ est nulle ! la raison pourquoi le dérivée $\frac{\partial f}{\partial x}$ s'annule est que la fonction $f(x,0)$ est constante (nulle). Idem pour la dérivée $\frac{\partial f}{\partial y}$.

3) Non, en fait elles n'ont pas de limite finie quand $(x,y) \to (0,0)$. Posons par exemple $x=0$, alors $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \begin{cases} \frac{1}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0. \end{cases}$

Puisque $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ tend vers $\pm\infty$ quand $y \to 0^{\pm}$, on n'a pas $\lim_{(x,y)\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

4) Une fonction qui admet un DL d'ordre 1 en $\vec{x}$ est continue en $\vec{x}$, mais notre f n'est pas continue en $(0,0)$ (exemple du cours ; pour le retrouver, prendre $x=y$ et comparer avec x quelconque, $y=0$)